

TESIS CARRERA DE DOCTORADO EN FÍSICA

**INESTABILIDADES MAGNETOHIDRODINÁMICAS Y  
RELAJACIÓN EN TOKAMAKS ESFÉRICOS CON  
COLUMNA CENTRAL DE PLASMA**

**Lic. Leandro Gabriel Lampugnani**  
**Doctorando**

**Dr. Ricardo Farengo**  
Director

**Miembros del Jurado**  
Dr. Enzo Dari (Instituto Balseiro)  
Dr. Pablo Mininni (Departamento de Física, FCEN, UBA)  
Dr. Pablo A. Dmitruk (Departamento de Física, FCEN, UBA)

Abril de 2019

Sección Fusión Nuclear y Física de Plasmas  
Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro  
Universidad Nacional de Cuyo  
Comisión Nacional de Energía Atómica  
Argentina



A la memoria de mi padre,  
Jorge José Lampugnani





# Índice de contenidos

Índice de contenidos	v
Índice de figuras	ix
Índice de tablas	xv
Resumen	xvii
Abstract	xix
Introducción General	1
<b>1. Fusión Nuclear y Confinamiento Magnético</b>	<b>5</b>
1.1. Introducción a la Fusión Nuclear . . . . .	5
1.2. Confinamiento magnético . . . . .	7
1.2.1. Equilibrio . . . . .	8
1.2.2. Flujo magnético y confinamiento . . . . .	9
1.3. Tokamak, RFP, Spheromak y ST-PCC . . . . .	11
1.3.1. Estabilidad . . . . .	13
1.3.2. Transporte . . . . .	14
1.3.3. Formación, calentamiento y sostenimiento . . . . .	15
<b>2. El modelo MHD</b>	<b>17</b>
2.1. Aproximaciones MHD . . . . .	17
2.2. Leyes de conservación . . . . .	18
2.2.1. Ecuación de continuidad (masa y carga) . . . . .	18
2.2.2. Ecuación de movimiento . . . . .	18
2.2.3. Ecuación de inducción magnética . . . . .	19
2.2.4. Ecuación de la energía . . . . .	20
2.3. Parámetros adimensionales . . . . .	20
<b>3. Relajación magnética de plasmas</b>	<b>23</b>
3.1. Helicidad magnética . . . . .	23

3.1.1.	Invariancia de medida . . . . .	24
3.1.2.	Helicidad relativa . . . . .	25
3.2.	Reconexión Magnética . . . . .	26
3.3.	Teoría de relajación magnética . . . . .	28
3.4.	Auto-organización en plasmas con forzado externo . . . . .	29
3.5.	Estados de Taylor . . . . .	31
3.5.1.	Modos de Chandrasekhar-Kendall (CK) . . . . .	31
3.5.2.	Relación energía-helicidad . . . . .	33
3.5.3.	Decaimiento resistivo . . . . .	33
3.5.4.	Conservadores con flujo externo . . . . .	34
3.6.	Análisis de estabilidad. Principio de la energía . . . . .	34
<b>4.</b>	<b>Equilibrios MHD en plasmas magnetizados</b>	<b>37</b>
4.1.	Introducción . . . . .	37
4.2.	Ecuación de Grad-Shafranov . . . . .	38
4.3.	Resolución numérica de la ecuación de Grad-Shafranov . . . . .	39
4.4.	Configuración de campos externos . . . . .	41
4.5.	Equilibrios totalmente relajados . . . . .	43
4.5.1.	Superficies de flujo . . . . .	44
4.5.2.	Perfiles de campo magnético . . . . .	45
4.5.3.	Factor de amplificación y primer autoestado . . . . .	46
4.6.	Equilibrios con $\lambda$ no uniforme (energía libre) . . . . .	48
4.7.	Factor de seguridad ( $q$ ) . . . . .	49
4.8.	Conclusión . . . . .	52
<b>5.</b>	<b>Inestabilidades MHD y relajación magnética en ST-PCC-CG</b>	<b>55</b>
5.1.	Introducción . . . . .	55
5.2.	Inestabilidad de tilt para estados relajados . . . . .	56
5.2.1.	Factor de seguridad ( $q$ ) . . . . .	59
5.3.	Análisis dinámico de estabilidad . . . . .	61
5.3.1.	Descripción de las simulaciones con MHD resistiva . . . . .	61
5.3.2.	Inestabilidad de tilt . . . . .	63
5.4.	Inestabilidad de Kink . . . . .	67
5.4.1.	Análisis de estabilidad. Equilibrios MHD . . . . .	68
5.4.2.	Análisis de estabilidad. MHD resistiva . . . . .	71
5.5.	Conclusión . . . . .	75
<b>6.</b>	<b>Inyección de helicidad en ST-PCC</b>	<b>77</b>
6.1.	Introducción . . . . .	77
6.2.	Balance de helicidad magnética . . . . .	78

6.3. Inyección de helicidad . . . . .	81
6.4. Formación y sostenimiento . . . . .	82
6.4.1. Relajación magnética y estabilidad . . . . .	85
6.5. Decaimiento resistivo . . . . .	90
6.6. Conclusión . . . . .	92
<b>Conclusión General</b>	<b>95</b>
<b>A. Solución numérica a las ecuaciones MHD</b>	<b>99</b>
A.1. Forma conservativa de las ecuaciones MHD ideal . . . . .	99
A.2. Sistemas hiperbólicos lineales . . . . .	101
A.2.1. El problema de Riemann para sistemas lineales . . . . .	104
A.3. Propagación de ondas en MHD ideal . . . . .	106
A.4. Método numérico . . . . .	108
A.4.1. Formulación general para leyes de conservación . . . . .	109
A.4.2. Método de Godunov . . . . .	110
A.4.3. Linealización del problema de Riemann . . . . .	111
A.4.4. Aproximación numérica de la función de flujos . . . . .	111
A.4.5. Condiciones de borde . . . . .	112
A.4.6. Métodos de mayor orden . . . . .	113
A.4.7. Problemas multidimensionales . . . . .	114
A.4.8. Términos disipativos . . . . .	115
A.4.9. Restricción $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . . . . .	116
A.4.10. Implementación . . . . .	117
<b>Bibliografía</b>	<b>119</b>
<b>Publicaciones asociadas</b>	<b>125</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>127</b>



# Índice de figuras

1.1. Reactividad en función de la energía (KeV) o temperatura (Kelvin) para reacciones de fusión entre núcleos de Deuterio (D), Tritio (T) y Helio ( $\text{He}^3$ ) [1]. . . . .	6
1.2. Esquemas que muestra la evolución de los métodos de confinamiento, desde el solenoide (a), espejos magnéticos (b), hasta el toroide (c). El último es el más estudiado en la actualidad. . . . .	8
1.3. Superficies de presión constante, con campos magnéticos $\mathbf{B}$ y densidad de corriente $\mathbf{J}$ tangentes a las superficies. . . . .	9
1.4. Descripción de las áreas de integración $S_p$ y $S_t$ , junto con el campo magnético y las superficies magnéticas anidadas. . . . .	10
1.5. Esquema de sistemas de confinamiento magnético con los perfiles de campo toroidal ( $B_\phi$ ) y poloidal ( $B_{pol}$ ) . . . . .	11
3.1. Tubos de flujo magnético entrelazados. La figura muestra el campo magnético $\mathbf{B}$ , y los diferenciales de camino $d\mathbf{l}$ , de superficie $d\mathbf{s}$ y de volumen $d^3r$ . . . . .	24
3.2. Reconexión magnética de tubos entrelazados. En el instante inicial (a), la helicidad total está dada por el entrelazamiento. Luego de la reconexión (b), se diferencian dos tubos sin entrelazamiento donde la helicidad de cada uno esta dada por el enroscamiento. La helicidad se conserva luego de la reconexión. . . . .	27
3.3. Proceso de reconexión de dos tubos de flujo. La helicidad del instante inicial (a), esta dada por el enroscamiento de uno de los tubos ( $H = 4\Phi^2$ ). En la reconexión (b), parte de la helicidad se transfiere dejando como resultado dos tubos con helicidad $H_1$ y $H_2$ . . . . .	28
3.4. Vectores de campo magnético poloidal y contornos de flujo poloidal (a) y líneas de campo (b), para el estado de Taylor cilíndrico. . . . .	32

4.1. Condiciones de contorno utilizadas para resolver la ecuación de Grad-Shafranov (4.3). Se muestran ejemplos de tres configuraciones; con $f = 0$ (CG); $f = 0.5$ (PCC-CG) y $f = 1$ (PCC). Los gráficos en (a) corresponden a $\psi_s$ en la superficie $z = -h/2$ , en (b) a la superficie $z = h/2$ . . . . .	42
4.2. Aspectos generales de la geometría en el plano $r - z$ , y los campos de vacío obtenidos al resolver (4.14) con las condiciones de contorno de la figura 4.1. . . . .	43
4.3. Las figuras muestran contornos de flujo obtenidos resolviendo la ecuación (4.5) para un cilindro con elongación $e = 1$ y tres valores de $\lambda$ . En (a-c) $f = 0$ , en (d-f) $f = 0.5$ y en (g-i) $f = 1$ . Las líneas en color negro identifican la zona de superficies magnéticas cerradas, las de color rojo las líneas que salen por el electrodo superior y las azules las que retornan a la cara inferior (ver fig. 4.2). . . . .	45
4.4. Se muestran los perfiles de las componentes del campo magnético $B_r$ , $B_\phi$ y $B_z$ calculadas a la altura $z$ del eje magnético para los casos con $\psi \approx 4$ de la figura 4.3. . . . .	46
4.5. Factor de amplificación $\mathcal{A}$ para un cilindro de elongación $e = 1.0$ ( $k_1 \approx 4.955$ ), (a) en función del parámetro $\lambda$ para casos con $f = 0, 0.5$ y $1.0$ , y (b) en función de $f$ , para distintos valores de $\lambda$ (indicado en las curvas)	47
4.6. Ejemplo comparativo de los perfiles de $\lambda$ en función de $\psi/\psi_{max}$ usando dependencias $\tanh$ y lineal. . . . .	49
4.7. Perfiles de $q$ para equilibrios totalmente relajados y su dependencia con la relación de flujos $f$ . En (a) equilibrios con $\mathcal{A} = 2$ , y en (b) $\mathcal{A} = 4$ . La línea a trazos de color negro en (b) muestra el perfil de $q$ que se obtendría para un equilibrio dentro de un conservador de flujo aislado.	50
4.8. En (a) se muestra el perfil de $\lambda(\psi)$ lineal usando (4.23) para equilibrios con $\psi_{max} = 2$ y $\alpha$ entre 0 y $-0.6$ . En (b) el resultado del cálculo del $q$ de los equilibrios obtenidos para un cilindro con elongación $e = 1$ y relación de campos externos $f = 1$ (PCC). . . . .	51
4.9. En (a) se muestran los perfiles de $\lambda$ obtenidos usando el modelo $\tanh$ con $\delta$ entre 1 y 5, y se comparan con el modelo lineal (en línea punteada roja)) con $\alpha = -0.6$ de la figura 4.8. En (b) los perfiles de $q$ . Todos los casos son para un cilindro de elongación $e = 1$ y relación de campos externos $f = 1$ , con un factor de amplificación de $\mathcal{A} \approx 2$ . . . . .	52
5.1. Factor de amplificación en función de $\lambda$ para $e = 2$ y diferentes valores de $f$ . Las soluciones con $\lambda > k_1^{n=1}$ (línea a trazos) podrían ser inestables al tilt. La región de soluciones estables se indica con el área pintada en color rojo claro. . . . .	58

5.2. Mapas de estabilidad para equilibrios con $e = 2$ . Los contornos de $\lambda$ constante se muestran con líneas sólidas en las regiones de estabilidad y con líneas a trazos para los regiones inestables. . . . .	58
5.3. Umbrales de estabilidad para configuraciones con diferente elongación. Como en la figura 5.2, los equilibrios estables se obtienen para valores de $\mathcal{A}$ inferiores a este umbral. . . . .	59
5.4. Perfiles del factor de seguridad en tres puntos de la región de estabilidad para elongacion 2.0 (a) y 2.4 (b). Dado que las cantidades cambian poco dentro de esta región, los perfiles intermedios pueden ser cualitativamente inferidos. . . . .	60
5.5. Valores del factor de seguridad $q_w$ en la separatriz en función del factor de amplificación para diferentes elongaciones. Los valores corresponden a estados de estabilidad marginal con $\lambda = k_1^{n=1}$ (en rojo) y al límite PCC $f = 1$ (en azul). El mínimo $q$ para configuraciones de estabilidad marginal se muestra en líneas a trazos. . . . .	61
5.6. Factor de amplificación en rangos estables para estados relajados en función de la elongación. También se muestra el valor de $q$ en la separatriz para esos rangos. . . . .	61
5.7. Componente poloidal (flechas) y toroidal (mapa de color) del campo magnético mostrando la evolución de la inestabilidad de tilt para $e = 2$ . . . . .	64
5.8. (a) Evolución de la energía magnética del modo $n = 1$ ( $W_1$ ) relativa a la energía magnética total ( $W_{tot}$ ) para configuraciones aisladas con diferentes elongaciones. (b) Las tasas de crecimiento (puntos) fueron ajustadas con una curva de regresión, y extrapolada para estimar el umbral de estabilidad ( $\gamma = 0$ ). . . . .	65
5.9. Tasas de crecimiento obtenidas para tres serie de corridas con elongaciones 2, 2.2 y 2.4. La relación de flujos de la columna magnética es $f = 0.63$ en los tres casos. Cada punto corresponde a una simulación. . . . .	66
5.10. Límites de estabilidad calculados usando el método de los autovalores (líneas sólidas), y los estimados incluyendo el efecto de los campos fijos en los electrodos (puntos y líneas a trazos). Notar que cada punto corresponde a una familia de simulaciones. . . . .	66
5.11. (a) Perfiles de $\lambda$ en función del flujo poloidal $\psi$ , y (b) perfiles de $q$ en función de $r$ , calculados a partir de los resultados obtenidos de la ecuación de equilibrio (4.3) con $\beta = 0$ . . . . .	70

5.12. (a) Valores de $q_{c,sep}$ ( $q_c$ mínimo) como función de $\lambda_c/k_1$ para factores de amplificación $\mathcal{A} = 2.5$ y 4. (b) Puntos en el plano $(e, \lambda_c/k_1)$ donde $q_{c,sep} = 1$ para los equilibrios con elongación entre 1 y 2 y amplificación 2.5 y 4. La región en gris indica la zona donde los equilibrios tienen $q_{c,sep} < 1$ . . . . .	71
5.13. Mapa de valores $q_c$ y $q_t$ en un plano de coordenadas $(\lambda_c/k_1, \mathcal{A})$ para un cilindro de elongación $e = 1$ . En las regiones sombreadas se indica la presencia de superficies racionales $q_{c;t} = 1$ , o las zonas con $q_t(r) < 1$ o $> 1$ . Se muestra además los puntos de los cuatro equilibrios de la figura 5.11. . . . .	72
5.14. Energía magnética relativa del modo $n = 1$ ( $W_{n=1}/W_{n=0}$ ), factor de amplificación y flujo toroidal para equilibrios perturbados con amplificación inicial $\mathcal{A} = 2.5$ (a-c) y 4 (d-f). . . . .	73
5.15. Evolución en el tiempo de la configuración de campos magnéticos para el caso con $\lambda_c/k_1 = 2.8$ y $\mathcal{A} = 2.5$ . Se distingue la distorsión de la columna central y la destrucción de superficies magnéticas cerradas en $t = 13$ . . . . .	73
5.16. Evolución en el tiempo de los perfiles de $\lambda$ (a,b,c) y $q$ (d,e,f), para algunos casos de la figura 5.14 (a-c). Los perfiles de $\lambda$ y $q$ son calculados a una altura $z$ del eje magnético ( $z \approx 0$ ). . . . .	74
6.1. Evolución de las líneas de campo magnético (PCC) que atraviesan los electrodos en los que se inyecta helicidad. Los campos de velocidades son indicados mediante flechas de color rojo en las superficies, y las circunferencias rojas son los límites de los electrodos de radio $r_e$ . La evolución de la inestabilidad de kink se observa para $t \geq 58$ . . . . .	83
6.2. Evolución en el tiempo de la amplificación de flujo poloidal $\mathcal{A}$ , flujo toroidal máximo $\Phi$ y energía magnética relativa del modo $n = 1$ . Se muestran procesos de formación y sostenimiento de configuraciones magnéticas toroidales con tasas de inyección de helicidad $\dot{H}_0$ , $2\dot{H}_0$ y $3\dot{H}_0$ . En las figuras d-f, se muestran en una escala apropiada las evoluciones en la etapa de formación. . . . .	84
6.3. Evolución del flujo magnético poloidal en el plano $(r, z)$ para el caso con tasa de inyección de helicidad $3\dot{H}_0$ de la figura 6.2. En $t = 0$ solo se tienen campos de vacío ( $\mathbf{J} = 0$ , $\psi_{max} = 1$ ), y las regiones de color anaranjado indican amplificación de flujo, con $\psi > 1$ . Para el cálculo se utilizaron únicamente los campos axisimétricos ( $n = 0$ ). . . . .	85



6.4. Perfiles de $\lambda(\psi)$ y $q(r)$ para un intervalo de mínima amplitud de las fluctuaciones en las simulaciones de la figura 6.2. La figura (a) corresponde al caso con $\dot{H} = \dot{H}_0$ , (b) a $2\dot{H}_0$ y (c) $3\dot{H}_0$ . La línea en color rojo corresponde a un instante con $W_1/W_0$ mínimo, en verde a un instante previo con decaimiento del modo $n = 1$ , y en negro al instante en que el flujo toroidal es máximo (o límite de estabilidad del kink en la columna $q_c = 1$ ). . . . .	86
6.5. Campo eléctrico producido por el dínamo magnético para el caso con $\dot{H} = 3\dot{H}_0$ durante el sostenimiento. En (a) se muestra el promedio temporal del campo eléctrico paralelo al campo magnético regular ( $n = 0$ ) multiplicado por el radio ( $r$ ). Los contornos en negro corresponden a $\langle E_{d\parallel} \rangle = 0$ y la línea a trazos de color gris a la ubicación media de la separatriz. En (b) se graficó el valor a una altura $z = 0$ . Las figuras (c), (d) y (e) muestran la evolución temporal de las componentes toroidal y paralela del campo eléctrico y su módulo en los tres puntos indicados en (a). . . . .	87
6.6. Evolución del dínamo magnético paralelo a $\mathbf{B}^{n=0}$ . Se muestra la aparición y propagación de las fluctuaciones, desde un mínimo $W_1/W_0$ hasta un máximo en $t \approx 2750$ indicado en la figura 6.7. . . . .	89
6.7. (a) Evolución temporal de los flujos magnéticos, promedio espacial de las componentes paralela y perpendicular a $\mathbf{B}$ del campo de velocidad al cuadrado (o energía cinética sobre densidad $\langle 2E_k \rangle / \rho$ ), y energía magnética relativa de los modos $n = 1, 2$ y $3$ . La región sombreada es el intervalo de tiempo mostrado en la figura 6.6. (b) $\lambda(r, z)$ normalizado, donde las superficies en rojo y verde indican zonas con $\lambda > 0$ y $< 0$ respectivamente, y el contorno negro $\lambda = 0$ . . . . .	90
6.8. Decaimiento resistivo: a $t = 4000$ , luego de la formación y sostenimiento con inyección de helicidad $\dot{H} = 3\dot{H}_0$ , se detiene la inyección. En (a) los flujos magnéticos poloidal (o amplificación de flujos $\mathcal{A}$ ) y toroidal $\Phi$ , en (b) la energía magnética relativa de los modos $n = 1, 2$ y $3$ , en (c) los perfiles de $\lambda(\psi)$ , y en (d) los perfiles de $q$ . . . . .	91
6.9. Mapas de Poincaré de la configuración magnética durante el decaimiento resistivo de la figura 6.8. Los puntos negros corresponden a las líneas provenientes del campo magnético externo, en rojo a las de la estructura toroidal cerrada, y los verdes a las pertenecientes a islas magnéticas. . . . .	92
A.1. Dominio de dependencia del punto $(X, T)$ (a) y región de influencia del punto $x_0$ (b), para un sistema hiperbólico de tres ecuaciones, con $\lambda^1 < 0 < \lambda^2 < \lambda^3$ . . . . .	104

A.2. Construcción de la solución del problema de Riemann en $(X, T)$ . Traza- mos las características que llegan a este punto para determinar el valor de $w^p$ . El valor de $q$ es constante en cada región del plano $x-t$ . El salto a través de cada discontinuidad en la solución es un autovector de $A$ . .	105
A.3. Método de volúmenes finitos. $Q_i^n$ aproxima el promedio de $q$ en la celda $i$ . Este valor es actualizado a partir de los flujos $F_{i-1/2}^n$ y $F_{i+1/2}^n$ . . . . .	109
A.4. Método de Godunov. El flujo a través de la superficie $i - 1/2$ que separa las celdas $i - 1$ e $i$ , se calcula evaluando la función de flujo $f$ en $Q_{i-1/2}^n$ , que es la solución del problema de Riemann, a lo largo de $x/t = 0$ , con estados iniciales a izquierda y derecha $Q_{i-1}^n$ y $Q_i^n$ . . . . .	110
A.5. Representación lineal a trozos de la solución utilizando distintos métodos para elegir las pendientes: (a) pendientes centradas, (b) minmod y (c) MC. . . . .	114

# Índice de tablas

2.1. Números adimensionales usados comúnmente en MHD [2, 3]. . . . .	21
--	----



# Resumen

Los tokamaks esféricos (STs, por sus siglas en inglés) presentan muchas ventajas para ser utilizados como un reactor de fusión. Una mejora adicional sugiere reemplazar el conductor central por una columna de plasma (PCC). En este caso, se pueden utilizar electrodos para generar una corriente a través del PCC y producir el campo magnético toroidal. Más aún, la inyección de helicidad magnética (HI) por el PCC puede ser usada para formar y sostener la configuración mediante la relajación magnética.

Se estudiaron los equilibrios, la estabilidad y la dinámica de los tokamaks esféricos con una columna central de plasma (ST-PCC) y/o un cañón coaxial (ST-PCC-CG/ST-CG) en reemplazo del conductor central. Inicialmente, se resolvió de manera numérica la ecuación de Grad-Shafranov para calcular los equilibrios MHD ideales con cero  $\beta$  y diferentes distribuciones de flujos magnéticos externos. Se han considerado casos con estados relajados,  $\lambda$  ( $\lambda = \mathbf{J} \cdot \mathbf{B}/B^2$ ) uniforme, y no relajados,  $\lambda$  no uniforme. Los resultados mostraron la posibilidad de producir configuraciones magnéticas interesantes, con elevada amplificación de flujo poloidal y factor de seguridad ( $q$ ) similar al alcanzado en un tokamak. La estabilidad de este equilibrio fue estudiada calculando su contenido de energía magnética y mediante la realización de simulaciones no lineales, MHD resistivas. En las simulaciones dependiente del tiempo, los equilibrios fueron usados como condiciones iniciales y perturbados con los modos correspondientes al “tilt” y al “kink”. La información obtenida de los cálculos numéricos y analíticos fue utilizada para producir mapas de estabilidad y así mostrar regiones de operación estable como función de la elongación, los flujos magnéticos externos, la distribución de corriente y el factor de amplificación.

Además, se ha demostrado la formación y el sostenimiento de configuraciones ST-PCC con una elevada corriente toroidal y perfiles de  $q$  de relevancia mediante la inyección de helicidad (HI). En el régimen de sostenimiento se observaron elevados niveles de fluctuaciones, producidos por una inestabilidad de kink localizada en el PCC, con incrementos abruptos en la amplitud de los modos no axisimétricos. También se estudió el dinamo producido por las fluctuaciones y la amplificación de flujo que este produce. Adicionalmente, se han observado procesos de reconexión magnética y su contribución a la redistribución de la energía. Finalmente, cuando se detuvo la inyección de helicidad las fluctuaciones decayeron, permitiendo la aparición de superficies magnéticas cerradas. De esto surge la posibilidad de utilizar HI para formar ST-PCC junto con una combinación de forzado auxiliar de corriente (haces neutros y/o radio-frecuencias (RF)) con una elevada corriente de “bootstrap” para sostener una configuración libre de fluctuaciones.

**Palabras clave:** Magnetohidrodinámica, Confinamiento Magnético, Auto organización, Relajación magnética, Inestabilidades, Tokamak



# Abstract

Spherical tokamaks (STs) have many advantages from the perspective of a fusion reactor. A further improvement would be to replace the center post by a plasma center column (PCC). In this case, biased electrodes could be used to drive current along the PCC and produce the toroidal magnetic field. Moreover, the magnetic helicity injected (HI) by the PCC can be used to form and sustain the configuration via magnetic relaxation.

The equilibrium, stability and dynamics of Spherical Tokamaks with a Plasma Central Column (ST-PCC) and/or a Coaxial Gun (ST-PCC-CG / ST-CG) replacing the standard Central Post were studied. First, the Grad-Shafranov equation was solved numerically to calculate zero  $\beta$  ideal MHD equilibria with different external flux distributions. Both relaxed, uniform  $\lambda$  ( $\lambda = \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} / B^2$ ), and non relaxed, non uniform  $\lambda$ , cases were considered. The results showed the possibility of producing interesting magnetic configurations, with high poloidal flux amplification and tokamak like safety factor profiles ( $q$ ). The stability of these equilibria was studied by calculating their magnetic energy content and by performing non linear, resistive MHD simulations. In the time dependent simulations, the equilibria were used as initial conditions and perturbations corresponding to the "tilt" and "kink" modes were applied. The information obtained from the analytical and numerical calculations was employed to produce stability maps showing the stable regions of operation as a function of the elongation, the external flux, the current distributions and the amplification factor.

The formation and sustainment of ST-PCC configurations with high toroidal current and relevant  $q$  profiles via helicity injection (HI) was also demonstrated. In the sustainment regime a high level of fluctuations was observed, with abrupt increases in the amplitude of non axisymmetric modes produced by a kink instability localized in the PCC. The dynamo produced by the fluctuations, and the flux amplification it produces, were also studied. In addition, magnetic reconnection processes, and their contribution to the energy redistribution were observed. Finally, when helicity injection was switched off, the fluctuations decayed and nested, closed magnetic surfaces appeared. This opens the possibility of using HI to form the ST-PCC and a combination of auxiliary current drive (neutral beams and/or radio-frequency (RF)) and high bootstrap current to sustain a fluctuation free configuration.

**Keywords:** Magnetohydrodynamics, Magnetic Confinement, Auto organization, Magnetic Relaxation, Instabilities, Tokamak





# Introducción General

Con el avance de la ciencia y la tecnología existe un interés creciente en obtener energía de manera controlada mediante la fusión de núcleos livianos. Esto puede lograrse únicamente en reactores que soporten un ambiente de alta densidad y temperatura. Estas condiciones extremas requieren de métodos especiales ya que el material fusionable se enfría inmediatamente al entrar en contacto con las paredes del reactor, provocando además daños en las mismas. El camino más estudiado para confinar el combustible en las condiciones necesarias para que se produzca un número suficiente de reacciones de fusión es el confinamiento magnético. A altas temperaturas el gas adquiere una elevada ionización transformándose en un buen conductor eléctrico (plasma). En consecuencia, esto permite la utilización de campos magnéticos para confinar el plasma, disminuyendo al mínimo el contacto con las paredes del reactor.

A lo largo del tiempo se han probado diferentes conceptos de confinamiento magnético. Las más efectivas y estudiadas son las configuraciones magnéticas toroidales. Entre las configuraciones axisimétricas de este tipo se encuentran el tokamak y el reversed field pinch (RFP). El tokamak es el dispositivo más avanzado, pero está limitado a operar con valores de  $\beta$  (cociente entre la presión de plasma y presión magnética) muy bajos ( $\beta < 10\%$ ), y por lo tanto, un reactor de fusión basado en un tokamak tradicional resultaría muy grande y costoso. En los últimos años se ha desarrollado una variante conocida como tokamak esférico (ST, por sus siglas en inglés), que puede alcanzar valores significativamente mayores de  $\beta$  ( $\beta > 40\%$ ) [4]. Esto permitiría operar con reactores más compactos y económicos que eventualmente podrían utilizar combustibles avanzados (menor producción de neutrones). Los ST tienen una relación de aspecto (cociente entre el radio mayor y el menor del toroide) relativamente pequeña ( $< 1.5$ ), y por lo tanto, el agujero central del toroide es de reducidas dimensiones. Esto dificulta el blindaje del conductor (o super conductor) central por el que circula la corriente que produce el campo toroidal [5]. Por otro lado, la falta de espacio en el centro del toroide también limita el tamaño del solenoide utilizado para inducir la corriente toroidal en el plasma.

El RFP es una configuración toroidal axisimétrica, similar al tokamak. Una característica fundamental del RFP (a la que debe su nombre) es que la componente toroidal del campo magnético cambia de signo cerca de la pared. Esto ocurre debido a que el plasma sufre un proceso de relajación y auto-organización que, como se verá más adelante, también es fundamental para las configuraciones estudiadas en esta tesis. Muchos de los inconvenientes relacionados con el costo y tamaño de los reactores pueden minimizarse si se aprovechan los fenómenos de auto-organización. Este comportamiento fue explicado por primera vez por Taylor[6] utilizando un principio variacional que consiste en minimizar la energía magnética sujeta al vínculo de helicidad magnética

constante. El mecanismo de relajación puede producir transformaciones que conducen a equilibrios estables (o meta-estables) cuya energía magnética es un mínimo global (local). Esta contribución permitió el desarrollo del primer modelo teórico de una configuración magnética toroidal formada íntegramente mediante la relajación magnética, a la que llamaron spheromak [7]. Debido a estos interesantes resultados se realizaron experimentos para corroborar el modelo y estudiar la relajación magnética, tales como el PS-1 [8], CTX [9], SPHEX [10], etc.. Estas configuraciones se denominan Flux Core Spheromak (FCS) debido a que utilizan campos magnéticos externos y electrodos axisimétricos (Coaxial Gun o CG) para formar y sostener la configuración.

El éxito de los experimentos relacionados con los spheromaks permitió considerar nuevos conceptos de reactores de fusión nuclear. Como variante del FCS surge el tokamak esférico con columna central de plasma (ST-PCC), donde se utilizaría una columna de plasma (screw-pinch) conectada a dos electrodos ubicados en ambos extremos de la cámara de descarga en reemplazo de la columna conductora de un ST. El proyecto PROTOSPHERA [11] es de la clase ST-PCC y es el primer diseño experimental de este tipo. Posteriormente, Tang & Boozer (2006) [12] sugirieron otra alternativa, que consiste en agregar un tercer electrodo (coaxial y de mayor radio) en uno de los extremos. Esto proporciona mayor flexibilidad ya que parte del flujo externo puede salir por el electrodo ubicado en el extremo opuesto y parte por el ubicado en el mismo extremo. El diseño experimental fue presentado por Hsu & Tang (2007) [13]. Este tipo de configuraciones conduciría a reactores con menor costo de construcción y mantenimiento en relación a los ST, ya que no necesitan de una columna central sólida. No obstante, serían necesarias una serie de bobinas y electrodos (multipinch) para comprimir el plasma, y así lograr la estructura magnética necesaria capaz de optimizar el confinamiento y preservar la estabilidad de la configuración.

A pesar de que los ST-PCC incorporan ventajas en cuanto al mantenimiento y costo de construcción, al reemplazar el conductor central por una columna de plasma, se incorporan grados de libertad de movimiento de la configuración que resultan en nuevos desafíos relacionados con la estabilidad. Las inestabilidades adicionales que surgen son principalmente aquellas que pueden describirse mediante el modelo magnetohidrodinámico (MHD) ideal, debido a que se relacionan con el desplazamiento del plasma y a que la escala de los modos es comparable con el tamaño sistema. En general, las inestabilidades MHD afectan significativamente la evolución de los plasmas utilizados en las investigaciones sobre fusión nuclear controlada. En algunos casos pueden resultar en la pérdida del confinamiento y la destrucción del plasma, mientras que en otros solo producen una redistribución (relajación) moderada del perfil de corriente y pueden, inclusive, ser beneficiosas. En el proyecto PROTOSPHERA, por ejemplo, se utilizaría una aplicación del teorema de Cowling [14] para producir una corriente toroidal en el plasma. Esto consistiría en lograr que las fluctuaciones, producto de las inestabilidades de corriente (o “kink”) del screw-pinch, originen la aparición de modos no axisimétricos tales que el campo eléctrico de dínamo en la dirección toroidal sea no nulo ( $E_{d,\phi}(r, z) = \langle \mathbf{u}_n \times \mathbf{B}_n \rangle_\phi \neq 0$ , donde  $\langle \dots \rangle$  indica promedio toroidal y  $n$  el número de modo). Este método de formación y sostenimiento ha sido probado exitosamente de manera experimental y numérica [15–18]. El problema es que las fluctuaciones MHD necesarias para generar la corriente afectan el confinamiento porque tienden a destruir la configuración de superficies magnéticas cerradas.

El desafío principal de los reactores de fusión del tipo ST-PCC, está relacionado con la posibilidad de lograr el sostenimiento cuasi-estacionario combinando adecuadamente los métodos de inyección de helicidad con otros métodos no inductivos para el sostenimiento de la corriente. Esto requiere alcanzar estados marginalmente estables que sean apropiados para que se desarrollen procesos de relajación que conduzcan a la formación de las configuraciones deseadas. Esto dependerá de la geometría, campos magnéticos externos, distribución de corriente y gradientes de presión. La mayoría de los trabajos enfocados a estudiar la estabilidad de estas configuraciones consideran argumentos necesarios, pero no suficientes para garantizar estabilidad. En algunos casos, los análisis que se llevan a cabo utilizan las ecuaciones MHD linealizadas y perturbadas, o el principio de la energía, donde no entra la dependencia temporal ni se consideran factores asociados a términos no lineales, flujos de plasma, y los relacionados con la resistividad [19]. Para un mejor análisis se complementaron los estudios llevando a cabo simulaciones MHD dependientes del tiempo, para equilibrios perturbados en decaimiento resistivo y/o sostenimiento, como también para aquellos que se forman directamente desde las condiciones iniciales de vacío (corrientes nulas). Esto sirve para verificar y controlar adecuadamente los parámetros que hacen a la estabilidad de la configuración, corroborar la factibilidad de los métodos de formación y sostenimiento y los análisis de estabilidad previamente empleados y para justificar la necesidad de implementar métodos adicionales de control y calentamiento del plasma.

Esta tesis cuenta con seis capítulos, una conclusión general y un apéndice donde se describen los métodos numéricos utilizados para resolver las ecuaciones MHD resistivas. Los primeros tres introducen los principales conceptos y los restantes se relacionan con los métodos y resultados. En el capítulo 1 se introducen los aspectos principales relacionados con la fusión nuclear y el confinamiento magnético, se presentan las principales configuraciones magnéticas junto con una breve descripción de equilibrio, estabilidad, transporte y de los métodos de formación, calentamiento y sostenimiento. En el capítulo 2 se describen y justifican las aproximaciones introducidas para utilizar el modelo MHD, se muestran todas las ecuaciones empleadas y los parámetros adimensionales que determinan la escala y la dinámica del sistema. En el capítulo 3 se presentan las bases teóricas relacionadas con la relajación y auto-organización de plasmas descriptos por las ecuaciones MHD resistivas, la descripción analítica de configuraciones toroidales aisladas (*spheromak*) y el principio de la energía, que describe el origen de las inestabilidades ideales. En el capítulo 4 se resuelven las ecuaciones de equilibrio MHD ideal libre de fuerzas ( $\beta = 0$ ) para configuraciones del tipo ST-PCC, analizando los resultados en función de los parámetros de elongación, relación de flujos externos y corriente y se estudian las características resonantes de equilibrios con campos magnéticos externos. En el capítulo 5 se estudian las inestabilidades de tilt, en función de la elongación, los campos magnéticos externos y la amplificación de flujo (o energía magnética almacenada) y las inestabilidades de kink (o corriente) de la columna central de plasma y de la corriente toroidal. En el capítulo 6, se estudian los procesos de formación y sostenimiento mediante la inyección de helicidad, y se lleva a cabo un análisis detallado de la dinámica durante la fase de sostenimiento. En el apéndice A se describen los métodos numéricos implementados en los capítulos 5 y 6 para resolver las ecuaciones MHD resistivas.



# Capítulo 1

## Fusión Nuclear y Confinamiento Magnético

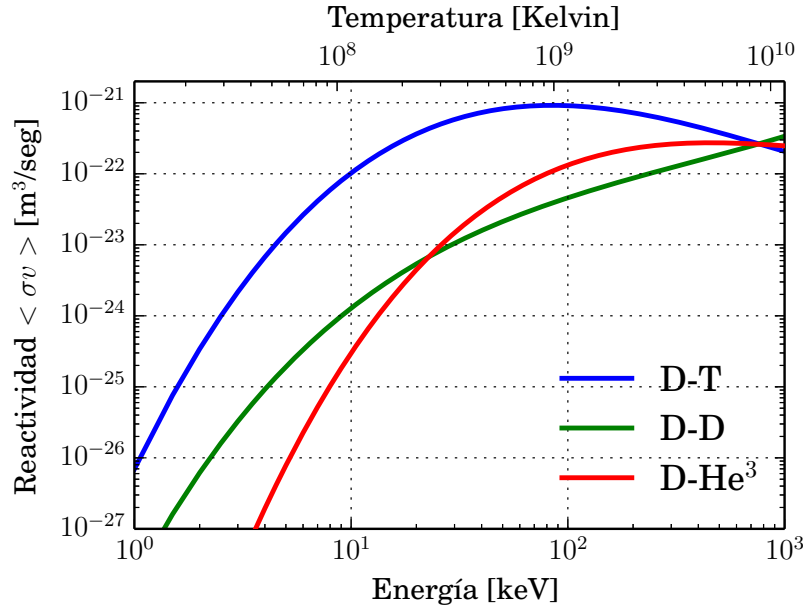
Se introducen los conceptos principales que describen la fusión de núcleos livianos para producir energía. Se describen las características de las configuraciones magnéticas para el confinamiento de plasmas. Definimos conceptos de relevancia como equilibrio, superficie magnética, estabilidad y transporte. Presentamos algunos de los experimentos más relevantes y los métodos de formación y calentamiento.

### 1.1. Introducción a la Fusión Nuclear

En la actualidad, el único mecanismo para obtener energía de manera controlada y con ganancia neta a partir de reacciones nucleares es a través de la fisión de núcleos pesados. Algunas fuentes de energía no nucleares pueden tener ventajas, pero debido al incremento en la demanda es necesaria una mayor producción, que no puede ser cubierta completamente con fuentes renovables. La fisión nuclear posee muchas ventajas frente a otras fuentes debido a que una pequeña cantidad de combustible nuclear puede entregar gran cantidad de energía aprovechable sin provocar mucho impacto en el medio ambiente. Sin embargo, al agotarse el combustible del reactor quedan residuos altamente radiactivos que si no son reciclados o almacenados de manera adecuada pueden ser extremadamente peligrosos.

Para algunos núcleos pesados la fisión es espontánea, y tiene un tiempo característico de decaimiento específico para cada tipo de isótopo. El número de reacciones por unidad de tiempo de una cantidad de combustible puede aumentar debido al bombardeo colectivo de neutrones. Es por ello que basta con lograr un adecuado manejo y control del material fisionable, uno puede aprovechar estas reacciones para transformar la energía liberada en energía utilizable. Sin embargo, como sucede con muchas de las fuentes de energía, la disponibilidad de combustible es limitada. Debido a que se trata de una tecnología madura, los desarrollos tecnológicos y las investigaciones relacionadas con este tipo de reactores están más bien orientadas hacia mejoras en la eficiencia y seguridad.

Otra manera de obtener energía a partir de reacciones nucleares es por medio de la fusión de núcleos livianos, como por ejemplo entre el Deuterio ( $D^2$ ) y el Tritio

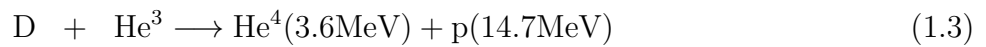
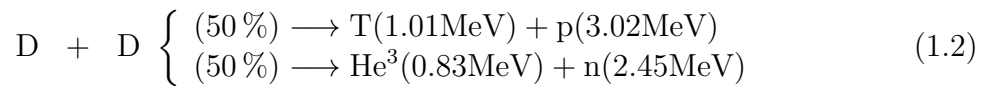
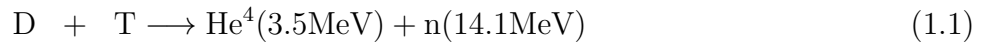


**Figura 1.1:** Reactividad en función de la energía (KeV) o temperatura (Kelvin) para reacciones de fusión entre núcleos de Deuterio (D), Tritio (T) y Helio ( $\text{He}^3$ ) [1].

( $\text{T}^3$ ). La energía liberada por nucleón en el proceso de fusión de D y T es  $\approx 4$  veces mayor que para la fisión, y da como resultado  $\text{He}^4$  y neutrones. Esta diferencia se debe principalmente a que la energía de unión del  $\text{He}^4$  es mayor que las del  $\text{D}^2$  y  $\text{T}^3$ .

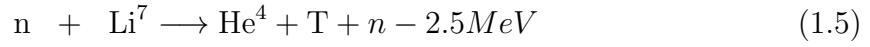
Las ventajas que se pueden lograr al utilizar la fusión como fuente de energía son enormes. Sin embargo, contrariamente a lo que ocurre con la fisión, la fusión de núcleos livianos es muy complicada desde el punto de vista técnico. La energía requerida para vencer la repulsión coulombiana es del orden de decenas de keV's, con una sección eficaz que depende del tipo de reacción. La reacción más fácil de producir es la fusión entre núcleos de Deuterio y Tritio (D-T) y luego siguen las reacciones D-D y D- $\text{He}^3$ . La reactividad, definida como  $\langle \sigma v \rangle$ , puede verse en la fig. 1.1, donde  $\sigma$  es la sección eficaz,  $v$  es la velocidad relativa entre núcleos, y  $\langle \cdot \rangle$  representa el promedio sobre una distribución maxwelliana.

Las reacciones mostradas en la fig. 1.1, con la energía y las partículas resultantes son:



Aunque las reacciones D-T producen gran cantidad de energía, equivalente a  $338 \text{ MJ/kg}$ , el inconveniente se presenta en que la reacción libera una gran cantidad de neutrones que pueden dañar el reactor. Además, el Tritio no se encuentra en estado natural y debe ser producido a través de la reacción del Litio ( $\text{Li}^6$  y  $\text{Li}^7$ ) con los neutrones, dando

Tritio y  $\text{He}^4$ .



La potencia de fusión entregada por unidad de volumen por la reacción  $D - T$ , con fracciones iguales de densidad por especie, está dada por la siguiente expresión

$$P_f = \frac{1}{4} n_e^2 \varepsilon \langle \sigma v \rangle \quad (1.6)$$

donde  $n_e$  es la densidad de electrones ( $n_e = n_D + n_T$ ),  $\varepsilon$  la energía liberada por reacción y  $\langle \sigma v \rangle$  la reactividad mostrada en la fig. 1.1. Para la reacción D-T, la energía liberada por reacción  $\varepsilon = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_n = 3.5\text{MeV} + 14.1\text{MeV} = 17.6\text{MeV}$ , donde  $\alpha$  hace referencia al  $\text{He}^4$ .

Debido a las pérdidas por radiación, la temperatura óptima de operación de un reactor de fusión es inferior a la necesaria para alcanzar  $\langle \sigma v \rangle_{\max}$ , donde en este rango de temperatura la reactividad es  $\propto T^2$ . Por lo tanto la potencia entregada será  $P_f \propto n^2 T^2$ .

Para obtener energía neta a partir de la fusión es necesario lograr una densidad y temperatura adecuadas, como para generar un número suficiente de reacciones por unidad de tiempo. Además, la energía que se obtiene de las reacciones de fusión debe ser superior a la energía entregada para calentar el plasma, para más detalles ver sección 1.3.2. Los métodos de confinamiento inercial, electrostático y magnético pueden ser utilizados a escala de laboratorio, donde el último es el tipo de confinamiento más efectivo y estudiado que utiliza un gas ionizado (plasma) que se comprime utilizando campos magnéticos externos. También existe el confinamiento gravitacional que, a pesar de ser el más eficiente y común en la naturaleza (estrellas), no se puede llevar a escalas de laboratorio. Sería necesaria una enorme cantidad de masa para lograr la suficiente atracción gravitatoria, de modo tal que la presión y temperatura sean suficientes como para fusionar núcleos.

## 1.2. Confinamiento magnético

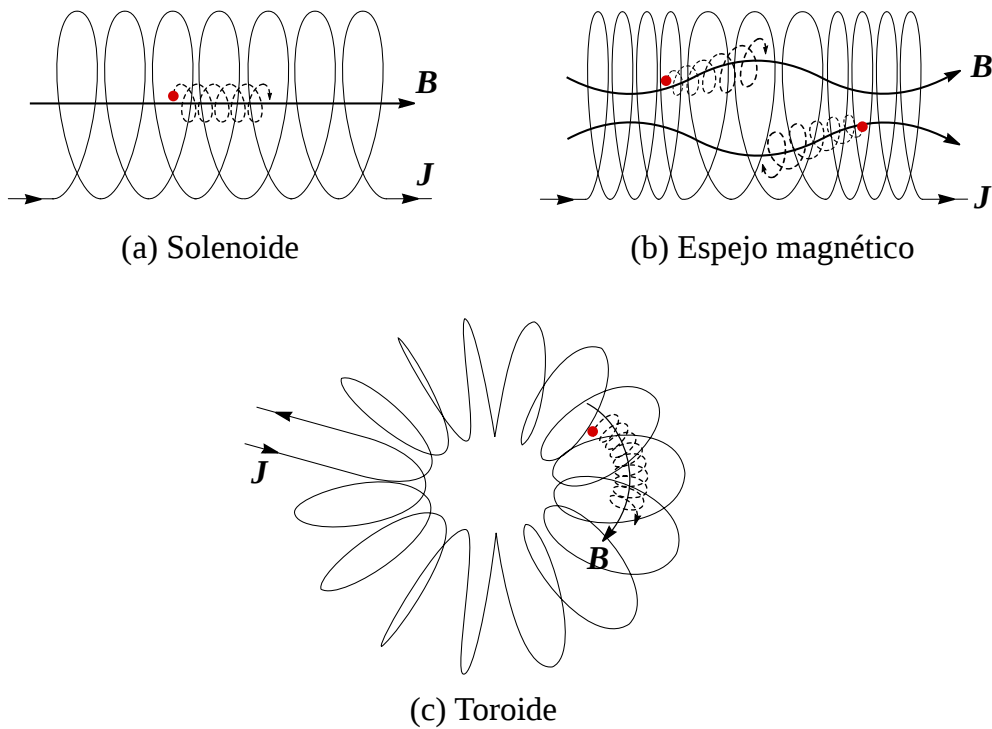
Un plasma es un gas de iones, electrones y átomos neutros cuya dinámica está determinada por interacciones de largo alcance (electromagnéticas). El grado de ionización aumenta con la temperatura, haciendo que el plasma sea mejor conductor eléctrico, en parte debido al incremento de cargas libres. La buena conductividad eléctrica permite que exista una densidad de corriente eléctrica  $\mathbf{J}$  que interactúa con el campo de inducción magnética  $\mathbf{B}$  dando origen a la fuerza de Lorentz ( $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ ).

La idea general del confinamiento magnético consiste en atrapar las partículas del gas ionizado por medio de campos magnéticos en un espacio reducido. Si las líneas de campo magnético se cierran sin intersectar las paredes de la cámara de reacción las partículas cargadas seguirán una trayectoria cerrada. El objetivo fundamental es lograr que un número grande de estas partículas interactúen, y para ello es necesario que el tiempo que permanezcan confinadas sea suficientemente elevado.

Distintos conceptos de confinamiento magnético pueden ser utilizados con mayor o

menor eficiencia. Lo importante para lograr una gran cantidad de reacciones de fusión es encontrar el concepto que permita el mayor tiempo de confinamiento posible. Esto se logra si cumplimos con algunas condiciones que lo hacen más eficiente, estas son: transporte reducido, buena estabilidad, y adecuados métodos para formar, sostener y calentar la configuración.

En los comienzos, los métodos de confinamiento magnético consistían en utilizar un solenoide de manera tal que las partículas sigan trayectorias helicoidales con un desplazamiento promedio paralelo a las líneas de campo. Sin embargo, la pérdida por los extremos resultó ser demasiado grande como para lograr tiempos de confinamiento suficientes. El método se mejoró aumentando la densidad del flujo magnético en los extremos del solenoide para formar espejos magnéticos y así reducir las pérdidas. Sin embargo, como la energía cinética de los iones y electrones es muy alta, el método no da el confinamiento adecuado y siguen prevaleciendo altas pérdidas. Estos inconvenientes se solucionaron en gran medida al unir ambos extremos, entre sí para formar una configuración toroidal, ver figura 1.2. Hasta el día de hoy este método de confinamiento magnético es uno de los más estudiados.

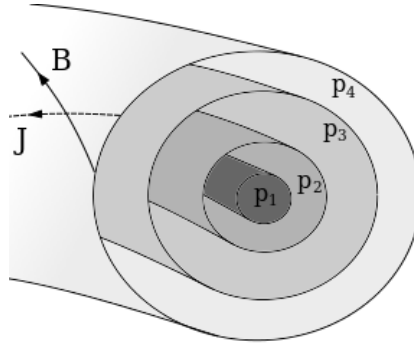


**Figura 1.2:** Esquemas que muestra la evolución de los métodos de confinamiento, desde el solenoide (a), espejos magnéticos (b), hasta el toroide (c). El último es el más estudiado en la actualidad.

### 1.2.1. Equilibrio

Un plasma confinado es un plasma cuyas partículas están restringidas en un espacio reducido, moviéndose aproximadamente en dirección paralela a las “líneas” magnéticas, que a su vez pueden formar superficies magnéticas cerradas. En una configuración toroidal, estas superficies magnéticas se pueden lograr mediante el uso de campos magnéticos externos, paredes conductoras, y corrientes que circulan por el plasma.





**Figura 1.3:** Superficies de presión constante, con campos magnéticos  $\mathbf{B}$  y densidad de corriente  $\mathbf{J}$  tangentes a las superficies.

Para describir de manera aproximada la distribución de campos magnéticos y fuerzas que se logra como resultado de las corrientes externas e internas del plasma, se utilizan las ecuaciones magnetohidrodinámicas (o simplemente MHD). La ecuación de equilibrio MHD se deduce de la ecuación de momento (movimiento), o del balance de fuerzas en una porción infinitesimal de plasma, como veremos con más detalle en la sección 2.2.2. Para un equilibrio estático ( $\partial/\partial t = 0$ ,  $u = 0$ ) la ecuación de balance de fuerzas, en el sistema de unidades MKS, resulta:

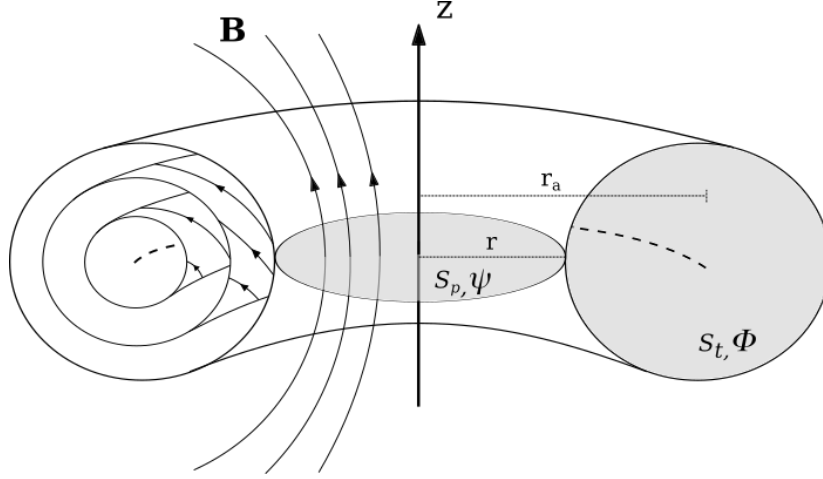
$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \nabla p \quad (1.7)$$

Un buen confinamiento exige que en el equilibrio se logre una distribución de campos con superficies magnéticas cerradas en un volumen finito. Las corrientes internas, junto con los campos magnéticos externos, formarán la configuración de campos con superficies magnéticas anidadas requeridas. Superficies de este tipo son de especial interés para el confinamiento, debido a que la presión y los contornos de flujo magnético coinciden en un estado de equilibrio MHD al satisfacerse  $\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0$ . Esto quiere decir que las líneas de campo magnético deben yacer sobre superficies de presión constante. Lo mismo ocurre con la densidad de corriente y la presión, de (1.7) se obtiene  $\mathbf{J} \cdot \nabla p = 0$ , esto quiere decir que no existen componentes de  $\mathbf{J}$  perpendiculares a las superficies de presión constante, ver Fig. 1.3.

### 1.2.2. Flujo magnético y confinamiento

Para el estudio de los equilibrios MHD en configuraciones magnéticas toroidales, suele descomponerse el campo magnético en las componentes toroidal y poloidal. Si utilizamos coordenadas cilíndricas, la componente toroidal del campo magnético coincide con la azimutal, mientras que la poloidal es la que yace en el plano  $rz$  (o plano poloidal). Este sistema de coordenadas es de gran utilidad para introducir el flujo poloidal  $\psi$  que, en el equilibrio estático, satisface  $\mathbf{B} \cdot \nabla \psi = 0$  y se define como:

$$\psi = \int_{S_p} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.8)$$



**Figura 1.4:** Descripción de las áreas de integración  $S_p$  y  $S_t$ , junto con el campo magnético y las superficies magnéticas anidadas.

donde  $S_p$  es un círculo de radio  $r$  ubicado a una altura  $z$  respecto del eje  $\hat{z}$ . De manera similar, el flujo de la componente toroidal es definido como:

$$\Phi = \int_{S_t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.9)$$

donde  $S_t$  es el área desde el eje magnético ( $r_a$ ) hasta la superficie magnética  $\psi(r, z)$  ver Fig. 1.4. En configuraciones con simetría azimutal ambos flujos pueden utilizarse como una coordenada que identifica cada superficie de flujo.

De la ecuación (1.8), un campo magnético con simetría azimutal puede escribirse

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2\pi} \nabla \psi(r, z) \times \nabla \phi + r B_\phi(r, z) \nabla \phi \quad (1.10)$$

donde  $\nabla \phi = \hat{\phi}/r$ . El flujo poloidal y la componente toroidal del potencial vector ( $A_\phi$ ) están directamente relacionados. Como podemos ver en la ecuación anterior la componente poloidal se puede escribir

$$\mathbf{B}_{\text{pol}} = \frac{1}{2\pi} \nabla \psi(r, z) \times \nabla \phi = \nabla \times \left( \frac{\psi(r, z)}{2\pi r} \hat{\phi} \right) \quad (1.11)$$

donde  $\psi$  se relaciona con el potencial vector de la siguiente manera

$$\psi = 2\pi r A_\phi \quad (1.12)$$

La relación anterior nos muestra un aspecto importante para el confinamiento de partículas. Suponiendo un equilibrio con simetría en  $\hat{\phi}$ , el momento canónico  $P_\phi = mrv_\phi + qrA_\phi$  es una constante de movimiento para cada partícula. Usando la ecuación (1.12):

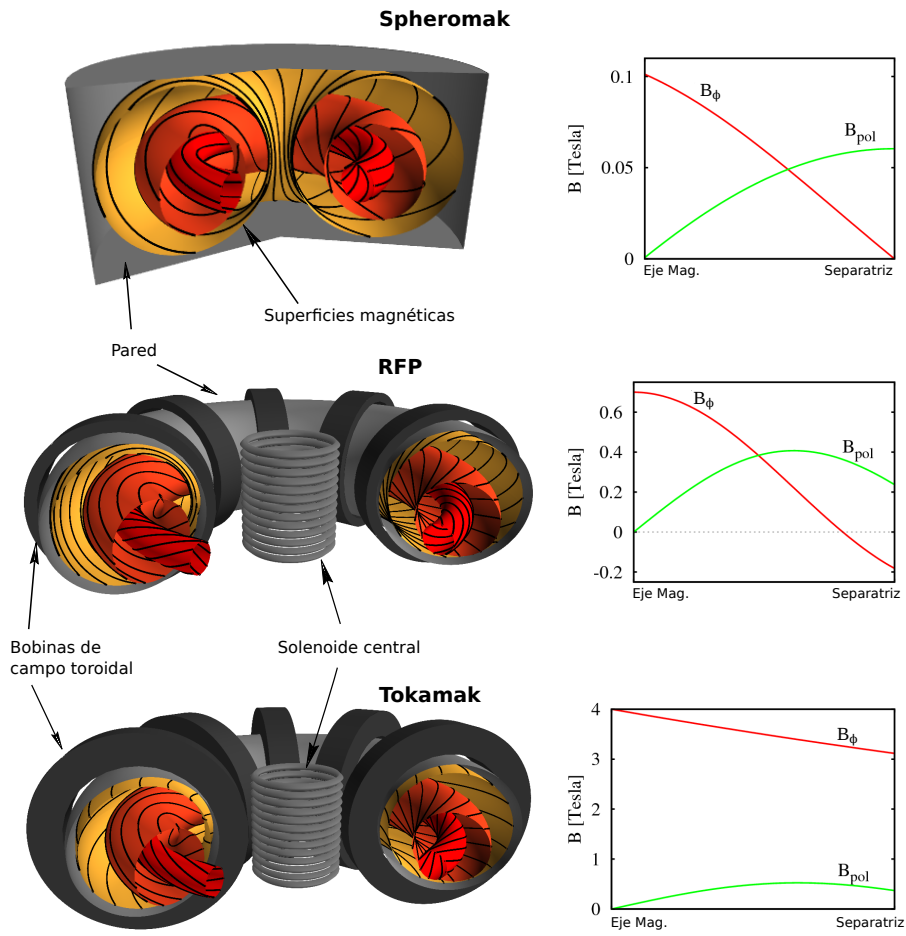
$$P_\phi = mrv_\phi + q\psi/2\pi \quad (1.13)$$

donde  $q$  es la carga de la partícula y  $v_\phi$  la componente azimutal de la velocidad. Para campos magnéticos intensos  $mrv_\phi$  es muy pequeño con relación a  $q\psi/2\pi$ , y por lo tanto

puede despreciarse [20]. Por lo tanto, en condiciones ideales, las partículas que inician su movimiento desde una superficie magnética  $\psi$  quedan condicionadas a moverse sobre esa superficie.

### 1.3. Tokamak, RFP, Spheromak y ST-PCC

Veremos en esta sección los esquemas más estudiados en confinamiento magnético. Para generarlos, es necesario emplear bobinas para producir campos externos o confinar el plasma dentro de un conductor perfecto (ver fig. 1.5), y utilizar métodos de calentamiento y sostenimiento que explicaremos más adelante, en la sección 1.3.3.



**Figura 1.5:** Esquema de sistemas de confinamiento magnético con los perfiles de campo toroidal ( $B_\phi$ ) y poloidal ( $B_{pol}$ )

- **Tokamak.** Es la configuración más estudiada y más desarrollada. El tokamak se caracteriza por tener geometría toroidal (o topología doblemente conexa). El campo magnético toroidal es generado por medio de bobinas externas y el plasma actúa como secundario de un transformador. El primario es un solenoide que se encuentra en el agujero del toroide y produce una variación temporal en el flujo magnético poloidal, induciendo de este modo una fuerza electromotriz toroidal que produce la corriente del plasma. El campo poloidal es mucho menos intenso

que el toroidal y es producido por la corriente toroidal del plasma y por espiras externas con corriente toroidal que evitan que el plasma toque las paredes de la cámara de descarga. Un campo toroidal de elevada intensidad relativa le da mayor estabilidad al toroide mejorando el confinamiento. El tamaño de las bobinas es notablemente mayor que para otras configuraciones, aumentando la dificultad tecnológica de las mismas y el costo de construcción.

Una variante a este tipo de reactor es el **tokamak esférico**, un dispositivo al que se le ha retirado (en algunos casos achicado) el solenoide central que induce la corriente toroidal y el campo magnético toroidal se genera mediante la corriente que circula por el hueco del toroide, disminuyendo su relación de aspecto (cociente entre el radio mayor y el menor del toroide).

- **RFP** (por *Reversed Field Pinch*). Esta configuración también es axisimétrica. El equilibrio se forma en un conservador de flujo toroidal y espiras más pequeñas que las del tokamak, concatenadas con el toroide, producen el campo toroidal. La corriente toroidal se genera empleando el mismo mecanismo que en los tokamaks. El campo toroidal se invierte (cambia de signo) cerca del borde del plasma (de ahí su nombre), como resultado de un proceso espontáneo de relajación magnética y auto-organización. La existencia de inestabilidades MHD en este tipo de configuraciones hace que el confinamiento no sea tan bueno como en los tokamaks. Sin embargo, en los últimos años se demostró que si la corriente poloidal se produce externamente, el plasma desarrolla un menor nivel de fluctuaciones y el confinamiento mejora notablemente, haciéndose semejante al de los tokamaks de igual tamaño [21].
- **Spheromak**. El equilibrio se debe a las corrientes del plasma y a la presencia de un conservador de flujo magnético simplemente conexo. Esta configuración es posible debido a mecanismos de relajación magnética y auto-organización, que dan origen a las superficies magnéticas anidadas con campos toroidal y poloidal axisimétricos, ver fig.1.5. La ausencia de elementos (bobinas, componentes estructurales, etc.) concatenados con el plasma presenta una serie de ventajas, entre las que se destaca la sencillez constructiva, lo que podría resultar en reactores más económicos y compactos. La primera descripción analítica del equilibrio y estabilidad del spheromak fue presentada por Rossenbluth & Bussac [7] usando el principio de mínima energía para plasmas libre de fuerzas [6], ver sección 3.3. Una configuración relacionada con el spheromak es la conocida como Flux-Core-Spheromak (FCS), que debe su nombre a que sobre una de las superficies del conservador de flujo se incorporan campos magnéticos externos y electrodos para formar y sostener la configuración.
- **ST-PCC (Spherical Tokamak with Plasma Center Column)**. Esta configuración se encuentra entre un spheromak y un tokamak esférico. Se caracteriza porque la columna central del tokamak esférico es reemplazada por una columna de plasma con superficies poloidales abiertas. Presenta un flujo poloidal no nulo en las paredes debido al campo axial que atraviesa el volumen. Los campos entrantes se producen mediante bobinas externas en la sección de los electrodos, y se inyecta corriente eléctrica de manera externa a través de una diferencia de

potencial. Esto produce una columna de plasma con un campo magnético helicoidal que recibe el nombre de “screw-pinch”. Su formación es en su totalidad debida a un proceso de relajación magnética, donde las corrientes toroidales son inducidas por inestabilidades en el plasma.

### 1.3.1. Estabilidad

Se dice que un plasma en equilibrio es inestable si al aplicar una pequeña perturbación esta crece y evoluciona llevando al plasma hacia una configuración de menor energía. Las inestabilidades pueden ser de distintos tipos y estar asociadas con escalas que van desde el orden del radio de Larmor de las partículas, hasta todo el sistema. Las primeras pueden deberse a gradientes de densidad y/o temperatura, o a anisotropías en la función de distribución y producen un incremento del transporte. Las de mayor escala son aquellas relacionadas con los gradientes de corriente y presión, llamadas también inestabilidades MHD ideales, o las resistivas relacionadas a fenómenos de reconexión magnética.

Las inestabilidades más importantes son las que pueden ser descritas a través del modelo MHD porque pueden producir la destrucción de la configuración. Generalmente se utilizan las ecuaciones MHD linealizadas para deducir límites de estabilidad, estudiar la dinámica lineal y calcular tasas de crecimiento. Por otro lado, en ciertas ocasiones se recurre al principio de la energía, el cual consiste en analizar los cambios de energía del plasma ante pequeños desplazamientos. Si esta variación es negativa el sistema se dice que es inestable, de lo contrario permanecerá estable en su estado original.

Al hablar de la estabilidad de un plasma descrito por las ecuaciones MHD, es necesario clasificarlas en ideales y resistivas. Las fuerzas responsables se deben a gradientes de corriente y de presión combinadas con la curvatura del campo magnético [22]. Las ideales son las que se desarrollan aunque no se incluya la resistividad del plasma, y las resistivas se originan en situaciones donde los campos magnéticos presentan gradientes elevados, favoreciendo los términos resistivos en las ecuaciones MHD. Esto da origen a las reconexiones magnéticas (ver sección 3.2).

Del análisis que surge del principio de la energía, las inestabilidades ideales pueden clasificarse en externas e internas. Las externas provienen de la interacción con la frontera (separatriz) o el exterior. Estas inestabilidades están asociadas al movimiento de las superficies magnéticas, y por lo tanto de todo el plasma. En cambio, en las internas el borde del plasma no resulta perturbado y depende de la configuración magnética en todo el volumen. Se pueden diferenciar dos tipos de inestabilidades:

- **Inestabilidades de corriente.** Son las producidas por las corrientes paralelas al campo magnético y dan origen al “kink”. La inestabilidad de kink puede tener origen “interno” o “externo” (según la clasificación anterior). Las “internas” surgen de gradientes de corriente elevados y actúan de manera local debido a la presencia de superficies magnéticas resonantes (ver sec. 3.6 y 5.2.1). En plasmas MHD resistivos, la inestabilidad destruye superficies magnéticas cerradas y provoca el arrollamiento de la corriente en forma de hélice de menor tamaño que la escala de todo el sistema. Por otro lado, las “externas” se originan por una elevada corriente en todo el volumen, son las que afectan a la separatriz y producen

el desplazamiento de todo el plasma. Un elevado gradiente de corriente significa energía libre, que al superar los límites de estabilidad se descarga de manera violenta, provocando la aceleración del plasma y por ende el desplazamiento de las superficies magnéticas.

- **Inestabilidad de presión.** A veces llamada inestabilidad de corriente perpendicular debido a que  $\nabla p \propto \mathbf{J}_\perp$ ; no es necesaria una corriente paralela para que aparezca la inestabilidad. Ocurre en plasmas en los que la presión hidrodinámica es considerable respecto al término de presión magnética ( $\beta \neq 0$ , ver tabla 2.1). Los gradientes de presión, junto con el término de la presión magnética  $B^2$  y la tensión por curvatura de campos  $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ , pueden producir dos tipos de inestabilidades: de “intercambio”, y los modos “balloning” [22, 23].

### 1.3.2. Transporte

Entender el transporte en plasmas magnetizados es una de las tareas más importantes para optimizar el rendimiento de futuros reactores de fusión. Para obtener energía, primero el plasma debe ser calentado de manera externa hasta lograr suficiente temperatura y densidad como para obtener una cantidad elevada de reacciones de fusión. La situación ideal es aquella en la que la energía depositada en el plasma por las partículas  $\alpha$  ( $\text{He}^4$ ) es suficiente para mantener su temperatura. Este estado se conoce como “ignición”.

La pérdida de energía del plasma puede escribirse en la forma:

$$P_L = 3nT/\tau_E \quad (1.14)$$

donde  $n$  es la densidad,  $\tau_E$  el tiempo de confinamiento de la energía, y  $T$  la temperatura de iones y electrones en equilibrio termodinámico[24]. Suponiendo que la energía entregada por las partículas  $\alpha$  debe al menos compensar las pérdidas, y usando las ecuaciones (1.6) y (1.14), se obtiene la siguiente condición de balance energético:

$$n\tau_E \geq \frac{12T}{\varepsilon_\alpha \langle \sigma v \rangle} \quad (1.15)$$

Esta ecuación establece la relación entre tiempo de confinamiento, temperatura, densidad y reactividad entre nucleones para lograr un balance de energía positivo. En plasmas de D-T, la reactividad para temperaturas entre 10 y 20 keV puede aproximarse como  $\langle \sigma v \rangle \approx 1.1 \times 10^{-24} T^2$  (con  $T$  en keV), y tomando  $\varepsilon_\alpha = 3.5 \text{ MeV}$ , la ecuación (1.15) queda:

$$nT\tau_E \geq 3 \times 10^{21} \frac{\text{keVs}}{\text{m}^3} \quad (1.16)$$

que es la condición de ignición. El producto  $nT\tau_E$  se conoce como triple producto de fusión. Observemos que el criterio (1.15), o la ecuación (1.16) son muy importantes a la hora de encontrar los rangos de operación para un tipo de reactor. El tiempo de confinamiento y la densidad deben ser lo suficientemente altas como para superar las pérdidas.

En los comienzos, los estudios experimentales daban resultados donde el transporte

(difusión) era muy superior a lo calculado. Se suponía que la pérdida de partículas por transporte solo se debía a las interacciones coulombianas. Sin embargo los resultados demostraron fuertes diferencias respecto a este modelo, y por lo tanto desde entonces se lo ha llamado transporte anómalo. Se sabe que el transporte anómalo se debe a la turbulencia producida por inestabilidades de longitud de onda corta. Por otro lado, los procesos de reconexión que modifican la estructura de las superficies magnéticas también pueden producir aumentos significativos en el transporte. Si bien los avances realizados en los últimos años son importantes todavía no hay una teoría completa que permita calcular los coeficientes de transporte partiendo de primeros principios.

Debido a la falta de modelos para predecir el transporte partiendo de primeros principios se utilizan métodos semi-empíricos que sirven para formular leyes de escala utilizando los resultados obtenidos en distintos dispositivos. Una ley de escala obtenida de esta forma para el tiempo de confinamiento de energía en tokamaks [25] es la siguiente

$$\tau_E \approx \frac{B_\phi^2}{nT} L^{1.8} \quad (1.17)$$

donde  $B_\phi$  es el campo toroidal y  $L$  el tamaño característico del plasma. Se estima que en reactores de fusión tipo tokamak,  $L$  debería ser  $\approx 10$  m como para lograr ignición.

Las inestabilidades del plasma, tanto microscópicas como macroscópicas (MHD), son muy importantes debido al interés general en comprender los mecanismos que hacen que el transporte de partículas aumente. Si logramos comprender y controlar el transporte, entonces el confinamiento mejorará y por lo tanto obtendremos reactores más eficientes, más pequeños y con menor daño de materiales.

### 1.3.3. Formación, calentamiento y sostenimiento

Para lograr un equilibrio adecuado a las necesidades de cada configuración (spheromaks, tokamaks, etc) el procedimiento de formación y sostenimiento pueden presentar diferencias entre los distintos conceptos. Sin embargo, es posible aplicar métodos similares para el calentamiento del plasma.

En la operación de un dispositivo de confinamiento magnético es posible distinguir tres etapas:

- **Formación** o ionización del gas de trabajo y establecimiento de las corrientes, tanto internas como externas, que producen el campo magnético necesario para confinar el plasma.
- **Calentamiento** del plasma hasta la temperatura necesaria para que se produzcan suficientes reacciones de fusión.
- **Sostenimiento** de las condiciones de operación. Esto incluye la reposición del combustible quemado, el mantenimiento de la temperatura y el sostenimiento de la corriente.

Como ya se dijo, en los tokamaks y RFP se produce un campo eléctrico toroidal variando la corriente en el solenoide ubicado en el agujero del toroide. Este campo eléctrico ioniza el gas y produce una corriente toroidal que calienta el plasma. En



los spheromaks con columna central o cañón coaxial, el campo eléctrico se genera a través de un potencial eléctrico entre electrodos. La corriente eléctrica aumenta y por relajación magnética una corriente toroidal es generada por efecto dínamo. Esto se discutirá con más detalle en los capítulos 5 y 6. Dependiendo del tipo de configuración se pueden requerir todos o solo algunos de los siguientes métodos de calentamiento y sostenimiento del plasma. Ordenado en etapas los métodos son:

- **Inducción mediante bobina primaria.** La corriente eléctrica se genera debido a la aceleración de iones y electrones por inducción de una bobina primaria, y por disipación Óhmica ( $P_{\Omega} = \eta \mathbf{j}^2$ ) el plasma se calienta. A medida que aumenta la temperatura del plasma la resistividad disminuye, y por lo tanto la temperatura máxima lograda serán solo de unos  $keV$ . En RFPs este método podría ser suficiente para lograr ignición. Sin embargo, en tokamaks se necesitan métodos adicionales para complementar el proceso de calentamiento.
- **Inyección de helicidad.** Se impone una corriente en la zona más externa de la configuración magnética. Esto puede hacerse, por ejemplo, aplicando una diferencia de potencial electrostático con un banco de capacitores. Una o más inestabilidades MHD se encargan de redistribuir la corriente por medio de un proceso de relajación magnética. Este es el método más utilizado en spheromaks y ST-PCC, y será empleado en esta tesis. La descripción de la implementación de este método se encuentra en las secciones 6.2 y 6.3.
- **Haz neutro.** Un haz neutro de partículas de alta energía de las mismas especies que el plasma (Deuterio o Tritio) es inyectado. Las partículas al ser neutras pueden penetrar dentro del plasma y luego ionizarse. Una vez ionizadas las partículas energéticas quedan atrapadas y transfieren su energía al plasma. En reactores de alta temperatura este método puede tener complicaciones tecnológicas debido a la dificultad para producir haces neutros con suficiente energía como para penetrar hasta el centro del plasma.
- **Campos rotantes.** Se utilizan campos magnéticos rotantes externos que arrastran los electrones del plasma generando una corriente toroidal.
- **Ondas de RF (Radio Frecuencias).** Se utilizan una serie de antenas y guías de onda para irradiar el plasma. El mecanismo de calentamiento y sostenimiento de la corriente consiste en que las ondas electromagnéticas interactúen de manera resonante con los iones y/o electrones. El método es muy eficaz y tiene la ventaja de que es posible depositar la energía de forma muy localizada, de esta manera es posible controlar los gradientes de temperatura.

En la etapa de sostenimiento el combustible quemado se repone utilizando válvulas que liberan gas neutro o inyectando pequeños “pellets” sólidos. El gas neutro difunde hacia el interior del plasma, donde se ioniza. Los pellets, inyectados a alta velocidad, penetran rápidamente dentro del plasma y se evaporan e ionizan en las zonas de alta densidad y temperatura.



# Capítulo 2

## El modelo MHD

Introducimos los modelos empleados para describir el comportamiento del plasma, desde la teoría de Boltzmann con partículas de distinta especie hasta la teoría MHD resistiva. Presentamos el sistema de ecuaciones cerrado en el que se encuentran las leyes de Maxwell aproximadas y las ecuaciones relacionadas con la dinámica: continuidad, momento, inducción magnética y energía. Introducimos además los parámetros adimensionales que caracterizan el comportamiento dinámico del plasma

### 2.1. Aproximaciones MHD

El modelo MHD se introduce para describir el comportamiento del plasma considerándolo un fluido conductor, pero para ello se requieren algunas aproximaciones previas. Las ecuaciones MHD se obtienen de las ecuaciones de Maxwell acopladas con el modelo cinético, conocido como ecuación de Boltzmann, donde las partículas de cada especie ( $\alpha$ ) están representadas por una función de distribución  $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ . Multiplicando la ecuación de Boltzmann por 1,  $m\mathbf{v}$  y  $mv^2$  e integrando en un volumen del espacio de velocidad ( $\int d^3\mathbf{v}$ ) se obtienen las ecuaciones de conservación de la masa ( $\rho_\alpha$ ), del momento ( $m_\alpha\mathbf{v}$ ), y de la energía ( $\frac{1}{2}m_\alpha u^2$ ) respectivamente. Con respecto a las colisiones, queda solo el término de intercambio entre distintas especies.

Las primeras aproximaciones consisten en descartar los términos de alta frecuencia de las ecuaciones de Maxwell. Es decir, se supone que las ondas que se propagan en el plasma tienen velocidad de fase muy inferior a la velocidad de la luz ( $w/k \ll c$ ) y las velocidades térmicas son no relativistas ( $v_{Ti} \ll v_{Te} \ll c$ ). Esto permite despreciar el término de corriente de desplazamiento en la ley de Ampere ( $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t \approx 0$ ). La cuasi-neutralidad del plasma ( $n_e \approx n_i$ ), que permite aproximar  $\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} \approx 0$ , surge de suponer que  $w \ll w_{pe}$  y  $L \gg \lambda_D$  (apantallamiento eléctrico) donde  $w_{pe}$  es la frecuencia de plasma de los electrones,  $L$  la longitud característica y  $\lambda_D$  la longitud de Debye. De estas consideraciones, las ecuaciones de Maxwell quedan:

$$\begin{aligned} (i) \quad \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & (ii) \quad \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} \\ (iii) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 & (iv) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Las aproximaciones relacionadas a las ecuaciones de momento descartan la inercia de los electrones,  $m_e \rightarrow 0$ . Esto físicamente significa que en los tiempos de la MHD la respuesta de los electrones es infinitamente rápida debido a su masa despreciable. Las escalas temporales son mucho más largas que las asociadas a la frecuencia de plasma de los electrones ( $w_{pe}$ ) y la de ciclotrón  $\Omega_e$ . Como se desprecia la masa de los electrones, la densidad está definida en función de la masa de los iones  $\rho = m_i n$ , y la velocidad del fluido  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_i$ .

Pese a la gran cantidad de aproximaciones introducidas, el modelo MHD proporciona una buena descripción del comportamiento macroscópico del plasma en un reactor de fusión. La forma ideal del modelo MHD es la más simple para describir el comportamiento de un plasma. Las ecuaciones ideales se obtienen despreciando los términos que contienen la resistividad del plasma, por lo que no pueden utilizarse para describir procesos de reconexión.

## 2.2. Leyes de conservación

### 2.2.1. Ecuación de continuidad (masa y carga)

En el modelo MHD se combinan las ecuaciones de los iones y electrones para obtener ecuaciones de un fluido. Utilizando las aproximaciones indicadas en la sección anterior la ecuación de conservación de la masa, también llamada ecuación de continuidad resulta:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.2)$$

donde  $\mathbf{u}$  es la velocidad del fluido en cuestión y se supone que no hay creación ni destrucción de masa. Esto quiere decir que la variación en el tiempo de la masa en un elemento de volumen será equivalente al caudal neto.

La densidad de corriente eléctrica puede escribirse en la forma  $\mathbf{J} = en(Z\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)$ , donde  $Z$  es el grado de ionización. Multiplicando las ecuaciones de continuidad de iones y electrones por las respectivas cargas, sumando ambas ecuaciones y usando la condición de cuasineutralidad obtenemos:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2.3)$$

conocida como ecuación de conservación (o continuidad) de la carga eléctrica.

### 2.2.2. Ecuación de movimiento

La ecuación de movimiento del plasma es muy similar a la ecuación de Navier-Stokes utilizada para fluidos neutros. La mayor diferencia radica en que para los plasmas de interés en fusión, la mayor fuerza de volumen es la de Lorentz ( $\propto \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ ). Por lo tanto, el balance de fuerzas por unidad de volumen es:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p - \nabla \cdot \Pi \quad (2.4)$$

donde  $D\mathbf{u}/Dt = \partial\mathbf{u}/\partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ ,  $p$  es la presión hidrodinámica, y  $\Pi = \mu(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I})$  es el tensor de esfuerzos viscosos o tensor de presión anisotrópico [23] ( $\mu$  se relaciona con la viscosidad cinemática a través de  $\mu = \rho\nu$ ). En el caso de un flujo incompresible  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ,  $\Pi$  se reduce a  $\nabla\mathbf{u}$ . La aproximación de fluidos para  $\Pi$ , es válida en el límite de campos magnéticos muy débiles. Si bien no es del todo correcto en nuestro caso, haremos uso de esta aproximación justificando esta práctica en que los valores de  $\mu$  son bajos. La versión completa del tensor de esfuerzos viscosos en presencia de campos magnéticos intensos es considerablemente más compleja [26].

Usando la ley de Ampère de las ecuaciones de Maxwell (2.1) (ii) para reemplazar  $\mathbf{J}$  en la ecuación (2.4), y haciendo uso del cálculo vectorial  $\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})$  junto con  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . La ecuación (2.4) queda expresada en la forma

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}}{\mu_0} - \nabla \left( \frac{B^2}{2\mu_0} + p \right) - \nabla \cdot \Pi \quad (2.5)$$

donde el primer término de la derecha es la fuerza ejercida por la curvatura del campo magnético, de carácter restitutivo, y el término  $B^2/2\mu_0$  es la “presión magnética” que se suma a la presión hidrodinámica del plasma.

### 2.2.3. Ecuación de inducción magnética

El plasma, como todo medio conductor, se resistirá a cambios en el flujo magnético que atraviesa una sección finita del mismo. Es decir, que frente a variaciones temporales del campo magnético responderá para contrarrestar dicha variación.

Junto con las leyes de Faraday y Ampere (ver ec. (2.1) (i) y (ii)), tenemos la ley de Ohm, en su versión simplificada con las aproximaciones MHD:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{J} \quad (2.6)$$

Donde  $\eta$  es la resistividad. Combinando estas ecuaciones podemos obtener una ecuación para la evolución del campo magnético en un fluido conductor. Las aproximaciones utilizadas para obtener la ecuación (2.6) toman en cuenta que la escala característica es mucho mayor que el radio de Larmor de los iones y electrones ( $r_i/L \ll 1$ ). Esto permite despreciar el término del efecto Hall y el término diamagnético de los electrones en plasmas de fusión. El término relacionado con las colisiones entre especies (o resistivo) ( $\eta \mathbf{J}$ ) termina siendo también muy pequeño comparado con  $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$  en la ecuación (2.6). Sin embargo, es sabido que a pesar de su reducido valor, este término es responsable de muchas de las inestabilidades observadas en los reactores de fusión. Sin este término en las ecuaciones, no puede haber reconexión magnética en el plasma.

Utilizando la ley de Ohm (2.6) para reemplazar el campo eléctrico en la ley de Faraday, y la ecuación de divergencia nula del campo magnético  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , obtenemos:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2.7)$$

La interpretación de esta ecuación es muy importante dado que aporta al entendimiento de la dinámica no lineal. El segundo término del miembro de la derecha de

la ecuación (2.7) es el termino de difusión, el campo magnético difunde en el plasma con un tiempo característico que depende de la resistividad del mismo. Por otro lado, cuando la resistividad es muy baja, se dice que la líneas de campo están “congeladas” en el fluido (frozen-in-flux condition). Finalmente, el primer término del miembro de la derecha de la ecuación (2.7) depende de la interacción entre el campo de velocidades ( $\mathbf{u}$ ) y el campo magnético. Si la velocidad tiene una componente perpendicular al campo magnético, el flujo generará un efecto de arrastre de las “líneas” magnéticas respecto a un sistema de referencia fijo en el espacio.

#### 2.2.4. Ecuación de la energía

Las ecuaciones (2.5) y (2.7) describen la evolución del campo de velocidades y del campo magnético. Sin embargo, estas ecuaciones no pueden ser resueltas directamente porque hay demasiadas incógnitas. Aún necesitamos más información debido a que el término de la presión no está definido y podrá ser función de la densidad y la energía interna.

Para la densidad tenemos la ecuación de continuidad (2.2), que expresa la conservación de la masa. Por otro lado, podemos expresar el balance de energía mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q} - Q_{c,r}, \quad (2.8)$$

donde  $w$  es la densidad de energía total,

$$w = \rho \left( \frac{u^2}{2} + e \right) + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad (2.9)$$

siendo  $e$  la energía interna por unidad de masa. En (2.8) el término  $Q_{c,r}$  expresa las pérdidas de calor por conducción y radiación (que no consideraremos), y  $\mathbf{q}$  representa el flujo de energía dado por,

$$\mathbf{q} = \left[ \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) + p \right] \mathbf{u} + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} - (\mathbf{u} \cdot \Pi) \quad (2.10)$$

Los tres términos del miembro de la derecha de esta expresión describen, respectivamente, el flujo de energía por convección, el flujo de energía electromagnética (vector de Poynting) y la transferencia de energía por acción de la fricción viscosa. Para cerrar el sistema se utiliza una ecuación de estado de la forma  $p = p(\rho, e)$ . Frecuentemente se emplea la aproximación de gas ideal, en cuyo caso  $p = (\gamma - 1)\rho e$ , donde  $\gamma$  es el cociente entre los calores específicos a presión ( $C_p$ ) y a volumen ( $C_v$ ) constante. En ese caso, la energía interna es proporcional a la temperatura,  $e = C_v T$  [3].

### 2.3. Parámetros adimensionales

Hemos presentado las ecuaciones MHD fundamentales para describir de manera macroscópica la física de plasmas. Las ecuaciones tienen en cuenta los términos resistivos y viscosos y por ello estas ecuaciones se conocen como ecuaciones MHD resistivas. En la naturaleza o en experimentos de laboratorio es importante conocer el grado de

relevancia que tendrá cada uno de los términos, ya que en muchos casos algunos pueden ser ignorados. Es importante notar, sin embargo, que en algunos casos la inclusión de términos aparentemente pequeños puede cambiar significativamente la dinámica del plasma. Finalmente, comparar los términos será de mucha utilidad para la comprensión física del problema, ya que nos permitirá comparar la importancia de cada una de las fuerzas que actúan en el plasma.

Veamos por ejemplo los ordenes de magnitud de los términos de la derecha de la ecuación de inducción magnética (2.7). Para esto introducimos una cantidad adimensional llamada número de Reynolds magnético de la siguiente forma

$$R_m = \mu_0 \frac{|\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})|}{|\eta \nabla^2 \mathbf{B}|} \approx \mu_0 \frac{u_0/L}{\eta/L^2} = \mu_0 \frac{u_0 L}{\eta} \quad (2.11)$$

donde  $u_0$  y  $L$  son la velocidad y longitud característicos. El número de Reynolds magnético nos brinda información sobre la importancia del término no lineal  $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$  frente al difusivo. Un  $R_m$  alto significa que el término difusivo es pequeño, y por lo tanto la dinámica va a estar gobernada por el término no lineal que podrá dar lugar a fenómenos de turbulencia.

En la tabla 2.1 se muestran los números más utilizados en MHD para caracterizar el plasma. Aquí,  $\Lambda$  es una longitud característica adecuada para definir el tiempo resistivo (ver sección 3.5.3),  $B_0$ ,  $\rho_0$  y  $p_0$  son valores del campo magnético, densidad, y presión,  $\kappa$  es la conductividad térmica,  $c_s$  es la velocidad del sonido y  $c_A$  es la velocidad de Alfvén.

Número de Reynolds $R_e \equiv u_0 L / \nu$	Número de Reynolds magnético $R_m \equiv \mu_0 u_0 L / \eta$
Número de Prandtl $P_r \equiv \nu / \kappa$	Número de Prandtl magnético $P_m \equiv \nu / \eta$
Número de Mach $M \equiv u_0 / c_s$	Mach basado en la velocidad de Alfvén $M_A \equiv u_0 / c_A$ , donde $c_A = B_0 / \sqrt{\mu_0 \rho_0}$
Parámetro beta $\beta \equiv 2\mu_0 p_0 / B_0^2$	Número de Lundquist $S \equiv \tau_r / \tau_A$ , donde $\tau_r = \mu_0 \Lambda^2 / \eta$ y $\tau_A = L / c_A$

**Tabla 2.1:** Números adimensionales usados comúnmente en MHD [2, 3].

Existe un numero muy grande de aproximaciones que pueden realizarse al estudiar los parámetros adimensionales en cada caso. En esta tesis los parámetros que utilizaremos más frecuentemente son, el tiempo de Alfvén  $\tau_A$  que mide el tiempo que tarda en propagarse la información, y el tiempo de difusión resistiva  $\tau_r$ . El tiempo resistivo junto con el tiempo de Alfvén, se relacionan al definir el numero de Lundquist ( $S$ ). A mayor número de Lundquist mayor tiempo de decaimiento resistivo. En general cuando  $S$  es grande las inestabilidades ideales son de mayor importancia. A diferencia del número de Reynolds, el número de Lundquist no solo tiene que ver con la longitud característi-

ca sino también con las propiedades del plasma, es decir, el campo magnético  $B_0$ , la densidad  $\rho_0$  y el parámetro característico  $\Lambda$ . Los valores típicos de  $S$  para experimentos relacionados con Spheromaks están en el orden de  $10^4 - 10^5$ , dependiendo de la definición  $\Lambda$ .

Otro número adimensional que utilizaremos es el parámetro  $\beta$ . El objeto de este parámetro es indicar la relación entre la presión hidrodinámica y las fuerzas magnéticas (presión magnética). En un plasma con bajo  $\beta$  (cero  $\beta$ ) la dinámica estará gobernada por los campos magnéticos. Además, en un equilibrio estático y estacionario ( $D/Dt \approx 0$ ), el término  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$  de la ecuación (2.4) resulta muy pequeño.

# Capítulo 3

## Relajación magnética de plasmas

Introducimos el concepto de helicidad magnética, el invariante más robusto de plasmas descritos a través de las ecuaciones MHD, y los conceptos de reconexión magnética y relajación. Describimos propiedades de auto-organización, consecuencia de los procesos de relajación y fenómenos de turbulencia, que permiten obtener configuraciones magnéticas con escalas características del orden del tamaño del sistema. Por último, se introduce una descripción teórica de los estados permitidos (estables o meta-estables) en equilibrios MHD con cero  $\beta$ .

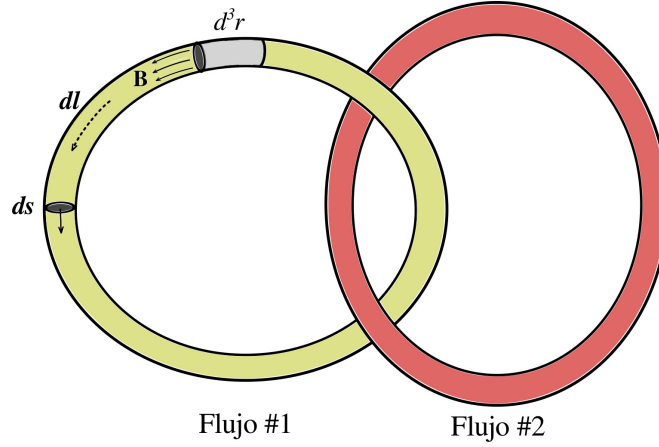
### 3.1. Helicidad magnética

La helicidad magnética es un concepto fundamental para comprender la evolución del plasma. En el modelo MHD resistivo es la cantidad global más robusta, que muestra (aproximadamente) invariancia durante los procesos de relajación y reconexión magnética que se verán más adelante. Se define la helicidad en la forma:

$$H = \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} d^3r \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son el potencial vector y el campo magnético respectivamente y la integración se extiende al volumen  $V$  que encierra a todo el campo magnético. La interpretación de esta cantidad se relaciona con la topología de los campos magnéticos; es una medida de cuan entrelazados están los tubos de flujo magnético. En un estado turbulento el decaimiento resistivo de la helicidad es más lento que el de la energía magnética. El proceso de relajación hará que la configuración decaiga hacia estados de mínima energía manteniendo la helicidad (aproximadamente) constante. Una vez alcanzado un estado totalmente relajado la energía magnética y la helicidad decaen a la par[20]. Esta cantidad es invariante ante los cambios de medida y es determinante para definir el estado del sistema. Veremos en la sección 3.5 que el contenido de helicidad en el sistema define los estados fundamentales permitidos.

Para interpretar la helicidad veremos un ejemplo sencillo con dos tubos de flujo magnético, como se observa en la figura 3.1. Suponiendo que los campos magnéticos son nulos fuera de los tubos, la helicidad total (3.1) será la suma de la contenida en cada volumen  $H = H_1 + H_2$ . Como los flujos magnéticos son independientes, la helicidad



**Figura 3.1:** Tubos de flujo magnético entrelazados. La figura muestra el campo magnético  $\mathbf{B}$ , y los diferenciales de camino  $d\mathbf{l}$ , de superficie  $d\mathbf{s}$  y de volumen  $d^3r$

puede escribirse en la forma

$$H_1 = \oint_{C_1} \int_{S_1} (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l})(\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}) = \Phi_1 \oint_{C_1} (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}) = \Phi_1 \Phi_2 \quad (3.2)$$

Si se realiza el mismo procedimiento para el cálculo de  $H_2$  se obtiene el mismo resultado anterior, y por lo tanto, la helicidad total puede escribirse

$$H = H_1 + H_2 = 2\Phi_1\Phi_2 \quad (3.3)$$

Si en ambos tubos el flujo es el mismo ( $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_0$ ), entonces  $H = 2\Phi_0^2$ . Se puede observar que en caso de no existir entrelazamiento, la integral  $\oint (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l})$  es nula y por lo tanto la helicidad es cero. Por el contrario, si el entrelazamiento es mayor, por ejemplo si cada tubo rodea al otro  $N$  veces, entonces la helicidad total será  $H = 2N\Phi_1\Phi_2$ . De esta manera sencilla, hemos visto que la helicidad es una cantidad que depende del flujo magnético y la topología de la configuración.

### 3.1.1. Invariancia de medida

La helicidad magnética es un invariante de medida (o gauge) si las líneas de campo se cierran sobre sí mismas sin atravesar las paredes del volumen considerado. Para demostrarlo, hacemos una transformación  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi$  y evaluamos la helicidad.

$$\begin{aligned} H' &= \int_V \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B} d^3r \\ &= H + \int_V \nabla\chi \cdot \mathbf{B} d^3r \\ &= H + \int_V \nabla \cdot (\chi\mathbf{B}) d^3r \\ &= H + \int_S \chi\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (3.4)$$



la integral de superficie, con la condición de que el volumen encierra a todo el flujo magnético, debe ser cero ya que no hay flujo magnético que atraviese la superficie de integración, y por lo tanto  $H' = H$ .

### 3.1.2. Helicidad relativa

Para que la helicidad cumpla con el criterio de invariante de medida (ver sec. 3.1.1), debe definirse en un volumen donde el flujo magnético normal a las superficies que delimitan dicho volumen sea nulo. Sin embargo, en la mayoría de los dispositivos de confinamiento, los campos magnéticos externos o de vacío atraviesan la superficie que delimita el volumen, y por lo tanto  $H' \neq H$  (ver ecuación (3.4)). Por este motivo, resulta necesario introducir el concepto de helicidad relativa.

Hemos visto que la helicidad es un concepto abstracto y poco intuitivo desde la definición matemática. Lo mismo ocurre con la helicidad relativa, y por ello, una de las maneras de comprender esta cantidad es utilizando el método de Berger y Field [27]. Este método consiste en suponer un campo magnético  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  que se cierra completamente dentro de un volumen  $V$  ( $\mathbf{B} \cdot \hat{n}|_{\Omega} = 0$  en la superficie que delimita el volumen  $V$ ). Luego dividimos ese volumen en “a” y “b”, escribimos  $V = V_a + V_b$ , y definimos un campo magnético hipotético llamado de “referencia” como:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{ref} &= \begin{cases} \mathbf{B}_0 & \text{en } V_a \\ \mathbf{B} & \text{en } V_b \end{cases} \\ \mathbf{A}_{ref} &= \begin{cases} \mathbf{A}_0 & \text{en } V_a \\ \mathbf{A} + \nabla h & \text{en } V_b \end{cases} \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde  $\mathbf{B}_0$  es un campo de vacío que satisface  $\nabla \times \mathbf{B}_0 = 0$  en  $V_a$ . De esta manera  $\mathbf{B}_0$  queda definido solo por su valor en la interfaz entre  $V_a$  y  $V_b$ . Tal como hemos probado en la sección anterior, tanto la helicidad magnética definida en el volumen  $V$  de los campos originales, como la helicidad de los campos de referencia, son invariantes ante cambios en la medida ya que no hay flujo magnético que atraviese la superficie que delimita el volumen  $V$ . A su vez, debido a estos resultados la helicidad relativa también será un invariante de medida si la definimos de la siguiente manera

$$H_{rel}^{BF} = \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} d^3r - \int_V \mathbf{A}_{ref} \cdot \mathbf{B}_{ref} d^3r \quad (3.6)$$

Separando las integrales de volumen sobre  $V_a$  y  $V_b$  y usando  $\mathbf{A} - \mathbf{A}_{ref} = \nabla h$ , se obtiene finalmente

$$H_{rel}^{BF} = \int_{V_a} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{B}_0) d^3r - \int_{S_{int}} h \mathbf{B} \cdot \hat{n} dS \quad (3.7)$$

donde  $S_{int}$  es la interfaz entre  $V_a$  y  $V_b$ . Por otro lado, de manera un poco más abstracta, Finn y Antonsen [28] definen a la helicidad relativa como

$$H_{rel}^{FA} = \int_{V_a} (\mathbf{A} + \mathbf{A}_0) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) d^3r \quad (3.8)$$

Puede demostrarse que  $H_{rel}^{FA} = H_{rel}^{BF}$  al desarrollar la anterior expresión (3.8)[20]. La

ventaja principal de la helicidad relativa definida de esta última manera radica en que la integración se realiza sobre el volumen fijado por  $V_a$ , independizándonos de la integral de superficie de la ecuación (3.7).

## 3.2. Reconexión Magnética

En los plasmas magnetizados es común encontrar fenómenos de reconexión magnética. El principio de este proceso es ampliamente estudiado en la comunidad científica y su naturaleza puede resultar muy compleja, ya que la física de plasmas y los procesos de reconexión pueden ser estudiados desde múltiples modelos, escalas, y aproximaciones. La reconexión magnética explica muchos de los fenómenos físicos involucrados en Spheromaks y Tokamaks, la dinámica magnetosférica, las eyecciones de masa coronal en la superficie del Sol[2] y su versión relativista en agujeros negros [29].

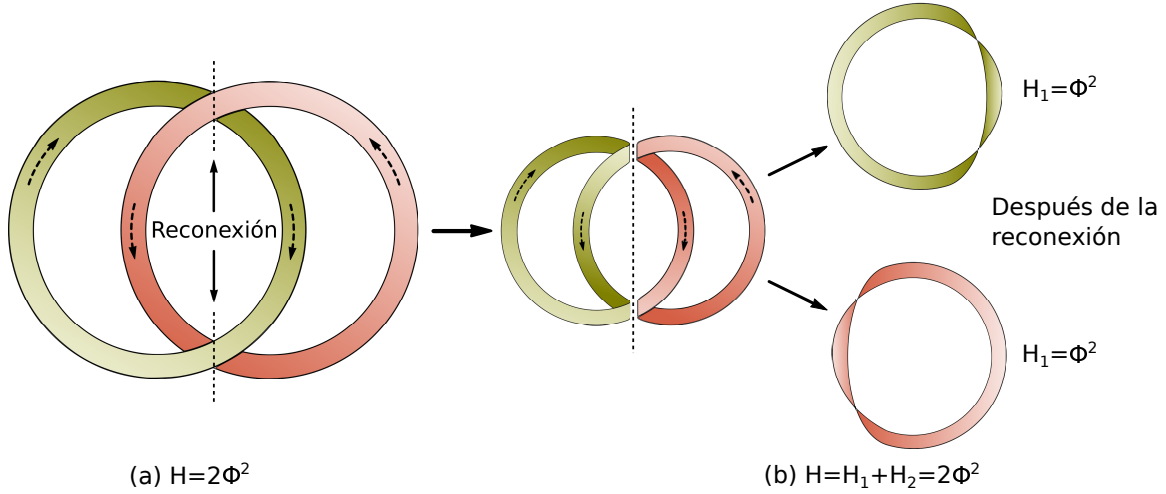
La reconexión es, en esencia, una reestructuración de la topología de un campo magnético causada por el cambio en la conectividad de los tubos de flujo magnético. Este cambio permite la liberación de energía magnética almacenada, y en muchas situaciones es la fuente dominante de energía libre en el plasma [2]. Los plasmas son buenos conductores eléctricos y por este motivo, en muchos casos puede considerarse que el flujo de campo magnético se mantiene constante a través de una superficie que se mueve con el plasma. Esto deja de satisfacerse al hablar de reconexión magnética, y se espera que bajo ciertas condiciones los campos magnéticos se reconecten, permitiendo la distribución de energía en el plasma.

Para poder continuar, cabe hacer una aclaración respecto del concepto de tubo de flujo magnético y línea magnética. Estas entidades no son reales desde el punto de vista físico sino que son abstracciones para ayudarnos a comprender las teorías presentadas en esta tesis y en la mayoría de la bibliografía. El concepto de línea magnética no es más que un tubo de flujo magnético de sección infinitesimal, y el tubo es el seguimiento contiguo en dirección al campo magnético de una sección del espacio con flujo magnético  $\Phi$ . Estudiar la helicidad a través del uso de estos conceptos es solo un método para comprender el fenómeno físico y la topología del campo de manera esquemática, de hecho las líneas de campo pierden su identidad en el proceso de reconexión.

La reconexión magnética es un fenómeno localizado que se produce en sectores del espacio con un elevado gradiente de campo magnético y un punto  $X$ , con campo magnético nulo, o en una superficie magnética donde la componente de campo magnético perpendicular al gradiente se anula. En experimentos de confinamiento, esta superficie es típicamente una separatriz, es decir, una región que divide dos zonas con características topológicas diferentes[30]. Estas regiones pueden ocurrir naturalmente cuando existen dos o más fuentes de campo magnético, ya sea por corrientes de inducción o campos magnéticos aplicados.

Los procesos de reconexión localizados preservan la helicidad de una configuración de campo. Para explicarlo veremos algunos ejemplos utilizando las herramientas topológicas anteriormente mencionadas. Primero, tal como vimos en la sección 3.1, la helicidad puede deberse al entrelazamiento (linking) de un par (o más) de tubos de flujo magnético, o también a que un tubo aislado tenga cierto enroscamiento (twisting) sobre sí mismo [31]. Esta idealización nos lleva a describir el contenido de helicidad en función

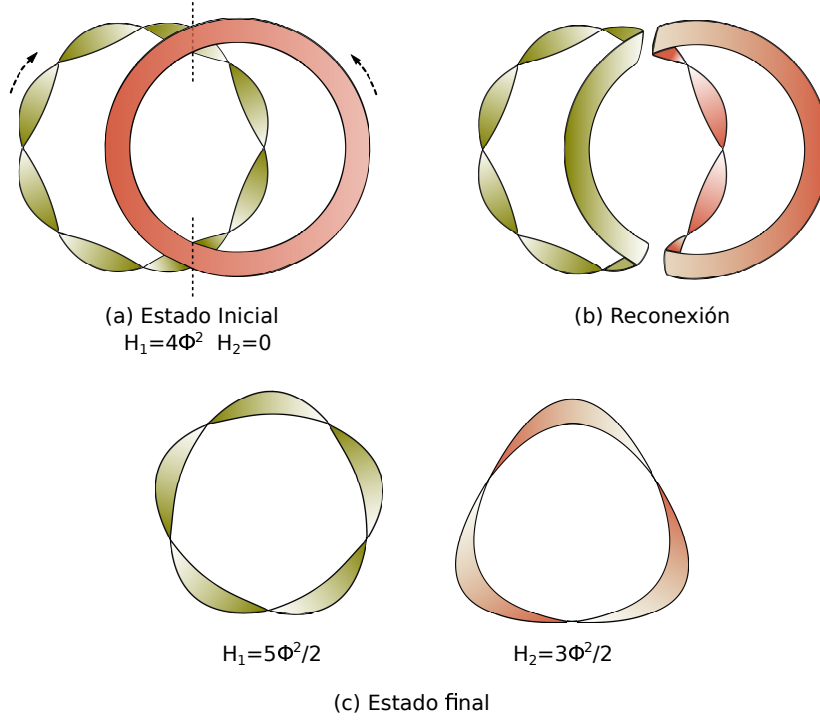
del flujo magnético que contenga cada tubo y su entrelazamiento. La conservación de la helicidad magnética en un proceso de reconexión puede explicarse de manera gráfica a partir de dos tubos magnéticos entrelazados, como se observa en la figura 3.2-(a). Como vimos en la sección 3.1, la helicidad magnética total de la configuración inicial de la figura de la izquierda es  $H = 2\Phi^2$ . La reconexión da como resultado dos flujos no entrelazados pero si enroscados, donde cada uno lleva una helicidad  $H_1 = H_2 = \Phi^2$ . La suma de ambos contenidos de helicidad dará un total  $H = H_1 + H_2 = 2\Phi^2$ , siendo por lo tanto el mismo valor antes y después de la reconexión.



**Figura 3.2:** Reconexión magnética de tubos entrelazados. En el instante inicial (a), la helicidad total está dada por el entrelazamiento. Luego de la reconexión (b), se diferencian dos tubos sin entrelazamiento donde la helicidad de cada uno esta dada por el enroscamiento. La helicidad se conserva luego de la reconexión.

Este ejemplo puede extenderse aún más y mostrar que, además la helicidad puede transportarse desde un tubo de flujo hacia otro. Para ello, simplemente tomamos un ejemplo similar al de la figura 3.2, solo que uno de los tubos tiene una cantidad de helicidad por enroscamiento  $H_1 = 4\Phi^2$  y el segundo una helicidad nula  $H_2 = 0$ , ver figura 3.3-(a). Ambos tubos no están entrelazados, por lo tanto la helicidad total será la del tubo 1 ( $H = 4\Phi^2$ ). Vemos que en los puntos de reconexión de la figura 3.3-(b), parte del enroscamiento se transfiere de un tubo al otro, y debido al tipo de reconexión mostrado en este ejemplo, quedan conformados dos tubos de flujo donde parte de la helicidad de uno se transfirió en el proceso de reconexión. La helicidad queda distribuida de manera tal que el tubo 1 contiene una helicidad  $H_1 = 5\Phi^2/2$ , y el 2,  $H_2 = 3\Phi^2/2$ . Al sumar ambas cantidades vemos que se ha conservado, pero el “estado” final será un sistema con una distribución diferente de helicidad. Aunque el concepto de helicidad no puede ser tomado de manera local, al usar la idealización topológica aplicada a estos conceptos uno puede decir que se puede pasar algo de “información” de un tubo al otro. Este pase de información puede pensarse como un proceso de intercambio de corriente eléctrica ( $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$ ), y por lo tanto una redistribución de energía magnética.

En la idealización recién presentada supusimos que la helicidad se conserva durante eventos de reconexión. En la dinámica de un plasma real, la disipación resistiva hace decaer la helicidad del sistema. Así como la helicidad, la energía también decae por acción de la resistividad. Sin embargo, las tasas de decaimiento de estas cantidades son



**Figura 3.3:** Proceso de reconexión de dos tubos de flujo. La helicidad del instante inicial (a), esta dada por el enroscamiento de uno de los tubos ( $H = 4\Phi^2$ ). En la reconexión (b), parte de la helicidad se transfiere dejando como resultado dos tubos con helicidad  $H_1$  y  $H_2$ .

diferentes. Por un lado, la tasa de decaimiento resistivo de la helicidad es proporcional a  $\eta \mathbf{J} \cdot \mathbf{B}$ , y por otro, la velocidad de disipación de la energía magnética es proporcional a  $\eta J^2$ . Los procesos de reconexión localizada, involucran láminas con elevada densidad de corriente y campo magnético relativamente bajo. Por este motivo, en presencia de fluctuaciones de pequeña escala y eventos de reconexión localizada, la energía decae mucho más rápidamente que la helicidad, haciendo que el plasma evolucione hacia estados de mínima energía manteniendo su helicidad aproximadamente constante. Esta es la base de la teoría de relajación magnética que se describe a continuación.

### 3.3. Teoría de relajación magnética

La relajación magnética es un fenómeno fundamental en la dinámica de plasmas turbulentos, y conduce a la minimización de la energía magnética para una dada helicidad magnética  $H$ . La teoría fue introducida por Woltjer (1958) [32] al demostrar que los estados de mínima energía para una dada helicidad son estados libres de fuerzas, y ampliada por Taylor (1974) [6] para explicar la reestructuración magnética de configuraciones toroidales de plasmas conocidas como “Reversed Field Pinch” (RFP). Más tarde, Rosenbluth y Bussac [7] usaron esta teoría para introducir el concepto de spheromak, que fue posteriormente obtenido con éxito en varios experimentos diferentes, validando la robustez del proceso de relajación magnética.

La base de la prueba de Woltjer y Taylor consiste en emplear el cálculo variacional para minimizar la energía magnética sujeta a un contenido de helicidad constante. Se

obtiene así la siguiente ecuación:

$$\delta W - \lambda \delta H = 0 \quad (3.9)$$

donde  $\lambda$  es el multiplicador de Lagrange asociado a la conservación de la helicidad. El resultado de minimizar la energía magnética en un sistema cerrado es un estado libre de fuerzas que expresa la capacidad del plasma para organizarse en configuraciones que satisfacen la ecuación

$$\nabla \times \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B} \quad (3.10)$$

donde  $\lambda$  es uniforme. Los campos magnéticos que satisfacen la ecuación anterior suelen llamarse estados de Taylor o de Woltjer-Taylor. Usando la ley de Ampere (2.1) (ii), la ecuación anterior puede expresarse en la forma

$$\mu_0 \mathbf{J} = \lambda \mathbf{B} \quad (3.11)$$

Esto muestra que la configuración está libre de fuerzas ( $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0$ ). Por lo tanto, un estado totalmente relajado será aquel donde se satisfaga la ecuación (3.10) con  $\lambda$  uniforme.

### Estados con $\lambda$ no uniforme

En el estudio de la relajación de plasmas con bajo  $\beta$  suelen usarse equilibrios libres de fuerzas donde  $\lambda$  deja de ser uniforme y pasa a ser una cantidad de superficie, es decir una función que depende del flujo poloidal (1.8)  $\lambda = \lambda(\psi)$ . Estos equilibrios se utilizan para estudiar la dinámica en escenarios de formación y sostenimiento [16, 33, 34]. La condición de que  $\lambda$  sea una cantidad de superficie sale de suponer que  $\lambda$  es una cantidad que depende de las coordenadas espaciales y usar la ecuación de la conservación de la carga (2.3) en la ecuación (3.11). De este modo se obtiene

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla) \lambda(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.12)$$

La ecuación anterior nos dice que la variación de  $\lambda(r)$  en dirección del campo magnético debe ser nula, y por lo tanto, como vimos en la sección 1.2.2,  $\lambda$  es una cantidad de superficie  $\lambda(\psi)$ .

Un estado con  $\lambda$  no uniforme no es un estado de mínima energía pero si un estado libre de fuerzas, donde el equilibrio puede ser inestable o meta-estable (estabilidad no lineal o local). Un  $\lambda$  no uniforme significa la existencia de energía libre y, si el sistema se vuelve inestable, los procesos de relajación magnética (minimización de la energía) harán que el plasma “decaiga” hacia estados con  $\lambda$  uniforme (estados de Taylor).

## 3.4. Auto-organización en plasmas con forzado externo

Cuando se aplica un forzado externo gradual a un plasma, el campo magnético comienza a evolucionar en forma continua siguiendo una serie de estados de equilibrio.

Eventualmente, el estado de equilibrio se vuelve inestable, activando una fase de actividad MHD que rápidamente reorganiza la configuración en un nuevo estado de equilibrio, mediado por la formación de láminas de corriente, eventos de reconexión magnética y cambios en la topología del campo. El exceso de energía magnética acumulado en el equilibrio inestable se libera abruptamente y se convierte en energía cinética, haciendo que el plasma se auto-organice (o relaje) en un estado de menor energía magnética. Esta es la visión global de los procesos de auto-organización, mediados por eventos de reconexión magnética, en prácticamente todos los plasmas de laboratorio y en muchos plasmas espaciales, como la magnetósfera y la corona solar [35].

Los RFP's y los spheromaks son dos ejemplos de configuración magnética que se forma gracias a un proceso de auto-organización [20, 36, 37]. En particular, las configuraciones tipo spheromak han sido exitosamente formadas utilizando una variedad de métodos experimentales, lo cual confirma que se trata de un estado preferencial hacia el cual el plasma evoluciona y que el proceso de auto-organización es robusto. Eventos de reconexión impulsiva seguidos por procesos de auto-organización son también observados en otros dispositivos de confinamiento magnético como las oscilaciones diente de sierra en tokamaks [35] y la reconexión de tubos de flujo en tokamaks esféricos [38].

En el caso de los spheromaks, no sólo es posible formar la configuración de manera espontánea, sino que además es posible sostenerla contra el decaimiento resistivo por medio de distintos mecanismos de inyección de helicidad [20, 39]. Independientemente del mecanismo utilizado, la tendencia del plasma a relajar hacia el estado de menor energía, manteniendo la helicidad, predomina y el sistema se auto-organiza en configuraciones muy similares al estado de Taylor que se describe en la sección 3.5. Sin embargo, como estas configuraciones son axisimétricas, no es posible sostenerlas en forma estacionaria mediante un forzado axisimétrico [14]. Por ello el sistema evoluciona cerca de un margen de estabilidad [17, 40] y en presencia de fluctuaciones que proveen un efecto dínamo magnético que sostiene la corriente toroidal. Este efecto, que ha sido medido experimentalmente [41] y reproducido mediante simulaciones numéricas [18], es analizado en detalle en el Capítulo 6.

La teoría de relajación magnética provee una muy buena aproximación del estado preferencial (auto-organizado) que el plasma adopta, bajo las condiciones de contorno adecuadas. Sin embargo, esta teoría no aporta ningún detalle del mecanismo ni de la dinámica responsable de llevar al sistema a tal estado. En el estudio de la generación de campos magnéticos de escala planetaria, el proceso dinámico que se considera responsable es el de cascada inversa [42, 43]. En presencia de un alto grado de turbulencia estacionaria, el hecho de que el sistema tenga dos invariantes ideales cuadráticos ( $W$  y  $H$  en MHD 3D) que decaen a tasas diferentes (decaimiento selectivo), hace que el invariante más robusto ( $H$ ) se acumule en las escalas de mayor tamaño del sistema (cascada inversa). Esto permite que una fracción del invariante que decae más rápidamente ( $W$ ) se transfiera a la escala de mayor tamaño, mientras que el exceso (sobre el estado de mínima energía a una dada helicidad) recorre el rango inercial y se disipa en las escalas chicas (cascada directa). Si bien la idea de cascada inversa está bien establecida, existen aun varios temas abiertos respecto del comportamiento de la turbulencia MHD en este proceso, como la universalidad de la dinámica de las escalas de disipación (es decir, si éstas dependen o no de las escalas mayores) y la localidad o no-localidad de las interacciones entre escalas [44].

Si bien la cascada inversa de energía en plasmas con alto grado de turbulencia guarda relación con el dínamo MHD (donde el campo eléctrico promedio producido por las fluctuaciones sostiene la configuración, ver Capítulo 6), ocurre que la separación de escalas en los plasmas de laboratorio no es tan grande como en los plasmas espaciales. Por ejemplo, el radio de giro de iones ( $r_{Li}$ ) es de varios milímetros para los plasmas producidos en tokamaks y spheromaks, siendo del orden del metro las dimensiones de estas máquinas. En cambio, en la corona solar  $r_{Li} \sim 10^{-1}$  m, mientras que  $L \sim 10^8$  m, lo cual establece un mayor rango de escalas espaciales disponible. Respecto al nivel de turbulencia, notamos que los valores de  $S$  (que es proporcional al  $R_m$ ) son del orden de  $10^4$  en spheromaks (puede llegar a  $10^8$  en plasmas de mayor temperatura, como en los tokamaks), y  $\sim 10^{14}$  en la corona solar [2]. En esta Tesis veremos que es posible estudiar muchos aspectos de los procesos de relajación y auto-organización que ocurren en sistemas de confinamiento, y que son producidos por fluctuaciones MHD de gran longitud de onda, sin la presencia de un amplio espectro de turbulencia.

### 3.5. Estados de Taylor

La relajación magnética, a través de fenómenos turbulentos o asociados a inestabilidades MHD, conduce a la formación de configuraciones magnéticas que satisfacen la ecuación (3.10), llamados estados de Taylor [6, 32], ver sec. 3.3. Tomando el rotor de (3.10), obtenemos la forma vectorial de la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 \mathbf{B} + \lambda^2 \mathbf{B} = 0 \quad (3.13)$$

Para condiciones de borde homogéneas esta ecuación constituye un problema de autovalores y autovectores. El parámetro  $\lambda$  es el autovalor característico, y depende fundamentalmente de la geometría de la configuración.

#### 3.5.1. Modos de Chandrasekhar-Kendall (CK)

En coordenadas cilíndricas las soluciones no nulas que satisfacen la ecuación (3.13), son las funciones  $\mathbf{B}_m^n$  con autovalor  $k_m^n$ , donde  $m = 1, 2, \dots$  está asociado a la coordenada  $z$  y  $n = 0, 1, 2, \dots$  a la toroidal. Las soluciones con autovalores  $k_m^n$  se llaman “modos Chandrasekhar-Kendall (CK)”, y si  $n > 0$  corresponde a los modos CK no-axisimétricos. Cuando  $m = 1$ , existirá algún  $n \geq 0$  que hace  $k_1^n$  el autovalor del estado de mínima energía (o menor  $k_1^n$ ).

Debido a procesos de relajación magnética, estados con autovalor  $k_m^n$  podrían ser alcanzados de manera espontánea desde un estado con autovalor  $k_m^{n'}$ . Esto dependerá de la energía magnética total de cada estado. Un estado con  $n$  y  $m$  dados podrá ser estable si es el estado de mínima energía, de no ser así se puede producir una relajación magnética y la configuración evoluciona hacia otro estado de menor energía, meta-estable o estable (estado fundamental) [12, 45, 46]. Veremos en la sección 5.2, que existen estados de mínima energía no-axisimétricos. Conocer estos autovalores será de mucha importancia para evaluar la estabilidad de equilibrios axisimétricos.



### Primer modo CK para un conservador de flujo cilíndrico

El modo más usado para representar la configuración magnética de un spheromak, es el primer modo de CK, con  $n = 0$  y  $m = 1$ . Para un conservador cilíndrico la condición de borde  $\mathbf{B} \cdot \hat{n}|_{\Omega} = 0$  se traduce en  $B_z = 0$  en  $z = -h/2$  y  $z = h/2$ , y  $B_r = 0$  en  $r = a$ , donde  $h$  y  $a$  son la altura y el radio del cilindro respectivamente. Con estas condiciones de contorno, la solución de (3.13) puede hallarse analíticamente en términos de funciones de Bessel y funciones trigonométricas [20]. Con  $n = 0$  la solución puede escribirse:

$$B_r = B_0 \frac{\pi}{\gamma_1 h} J_1(\gamma_1 r) \cos(g_1 m(z + h/2)), \quad (3.14)$$

$$B_\theta = -B_0 \frac{\lambda}{\gamma_1} J_1(\gamma_1 r) \sin(g_1 m(z + h/2)), \quad (3.15)$$

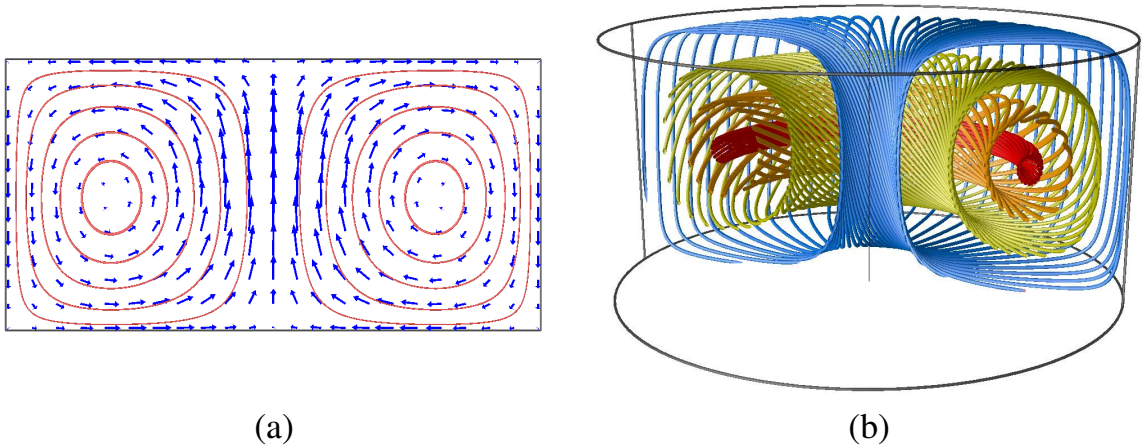
$$B_z = -B_0 J_0(\gamma_1 r) \sin(g_1 m(z + h/2)), \quad (3.16)$$

donde,  $\gamma_1 = x_{11}/a$ ,  $g_1 = \pi/h$  y  $x_{11}$  es el primer cero de la  $J_1$ . La solución está, por supuesto, definida a menos de una constante  $B_0$  independiente, es decir, que solo será una cantidad de “escala” que no cambia las características del equilibrio pero cobra sentido al estudiar la dinámica MHD. El autovalor  $\lambda$  de las auto-funciones (3.14)-(3.16) con  $m = 1$  es

$$k_1 = \sqrt{\frac{x_{11}^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{h^2}} \quad (3.17)$$

donde se asume implícito el superíndice  $n = 0$ . Reemplazando en la ecuación anterior  $x_{11} = 3.8317$  y suponiendo un cilindro con radio  $a = 1$  y altura  $h = 1$ , el primer autovalor asociado a los modos CK da como resultado  $k_1 \approx 4.955$ .

En la Fig. 3.4 (a) se muestran los vectores de campo magnético poloidal obtenidos con las ecs. (3.14) y (3.16) en una sección del cilindro para un caso con elongación  $h/a = 1$ . En la misma figura se muestran los contornos de flujo poloidal (definido



**Figura 3.4:** Vectores de campo magnético poloidal y contornos de flujo poloidal (a) y líneas de campo (b), para el estado de Taylor cilíndrico.

por (1.8)). En la Fig. 3.4-b se muestran las líneas de campo obtenidas integrando las trayectorias definidas por las ecs. (3.14) - (3.16), desde cuatro posiciones diferentes[3].



### 3.5.2. Relación energía-helicidad

El hecho de que se satisfaga  $\nabla \times \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B}$ , permite expresar al campo magnético de un estado de Taylor como  $\mathbf{B} = \lambda \mathbf{A} + \nabla f$ , donde  $f$  es un potencial arbitrario. Entonces, la energía magnética puede calcularse como,

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \mathbf{B} \cdot (\lambda \mathbf{A} + \nabla f) dV = \frac{\lambda}{2\mu_0} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} dV = \frac{\lambda}{2\mu_0} H, \quad (3.18)$$

ya que  $\int_V \mathbf{B} \cdot \nabla f dV = \int_V \nabla \cdot (f \mathbf{B}) dV = \int_{\partial V} (f \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = 0$ . La ec. (3.18) nos da una importante interpretación para el autovalor: en una configuración aislada,  $\lambda$  es proporcional al cociente  $W/H$ . Por eso, para un dado contenido de helicidad, el estado de mínima energía es aquel que tiene el mínimo  $\lambda$  permitido (o mínimo  $k_m^n$ ).

### 3.5.3. Decaimiento resistivo

Debido a la acción de la resistividad, la configuración decae a lo largo del tiempo. Para la energía magnética ( $W = \int_V \mathbf{B}^2 / 2\mu_0 dV$ ), el decaimiento viene dado por

$$\frac{dW}{dt} = - \int_V \eta \mathbf{J}^2 dV \quad (3.19)$$

Como  $\nabla \times \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B}$ , tenemos que  $\mu_0 \mathbf{J} = \lambda \mathbf{B}$ , entonces,

$$\frac{dW}{dt} = -\eta \int_V \mathbf{J}^2 dV = -\eta \frac{\lambda^2}{\mu_0^2} \int_V \mathbf{B}^2 dV = -2 \frac{\eta \lambda^2}{\mu_0} W \quad (3.20)$$

Por otro lado, se puede demostrar que el decaimiento resistivo de la helicidad es [3],

$$\frac{dH}{dt} = -2\eta \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} dV = -2\eta \frac{\lambda}{\mu_0} 2\mu_0 W, \quad (3.21)$$

que, usando (3.18), puede expresarse como,

$$\frac{dH}{dt} = -2 \frac{\eta \lambda^2}{\mu_0} H. \quad (3.22)$$

Vemos que la energía magnética y la helicidad del estado de Taylor decaen exponencialmente con el mismo tiempo característico:  $\mu_0 / (2\eta \lambda^2)$ . En consecuencia, la relación entre energía y helicidad establecida por (3.18) no se ve alterada por acción de la resistividad.

Cuando definimos el número de Lundquist (Tabla 2.1) permitimos que el tiempo resistivo y el tiempo de Alfvén estén definidos con distintas escalas de longitud. Del análisis precedente surge una escala de longitud adecuada para definir el tiempo resistivo:  $\Lambda = 1/k_1$ , donde  $\lambda = k_1$ . Por lo tanto, definimos el tiempo resistivo como

$$\tau_r = \frac{\mu_0}{\eta (k_1)^2}. \quad (3.23)$$

### 3.5.4. Conservadores con flujo externo

Como veremos más adelante, en muchos casos de interés práctico es necesario considerar configuraciones en las que un campo magnético externo atraviesa las paredes de la cámara en que se encuentra el plasma. En este caso las condiciones de contorno dejan de ser homogéneas y el problema matemático cambia significativamente porque  $\lambda$  puede adoptar cualquier valor. Las soluciones presentan características resonantes al tender  $\lambda \rightarrow k_m^n$ , límite asintótico donde las soluciones divergen. Es por ello que los estados con  $k_m^n$  serán estados no permitidos del sistema en dispositivos de confinamiento con flujos entrantes. Esto se debe a que la energía necesaria para aproximarse a este valor tiende a infinito. En los siguientes capítulos (caps. 4 y 5) se profundizan estos conceptos.

## 3.6. Análisis de estabilidad. Principio de la energía

El principio de la energía para un plasma ideal se basa en el concepto de que si una perturbación del plasma disminuye su energía potencial, entonces el equilibrio es inestable. La variación de la energía potencial producida por una perturbación se calcula como

$$\delta W = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{F} d\tau^3 \quad (3.24)$$

donde  $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r})$  es el campo de desplazamientos aplicado al plasma y  $\mathbf{F}$  es la fuerza resultante dada por

$$\mathbf{F} = \mathbf{J}_1 \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_1 - \nabla p_1 \quad (3.25)$$

y donde  $p_1$ ,  $\mathbf{B}_1$  y  $\mathbf{J}_1$  se calculan linealizando las ecuaciones MHD y reteniendo solo los términos de primer orden en la perturbación

$$\begin{aligned} p_1 &= \gamma p_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0 \\ \mathbf{B}_1 &= \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) \\ \mathbf{J}_1 &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}_1 \end{aligned} \quad (3.26)$$

reemplazando (3.26) en (3.25), se puede demostrar [20, 22] que la variación de la energía potencial resulta

$$\begin{aligned} \delta W = \frac{1}{2} \int \left( \frac{B_{1\perp}^2}{\mu_0} + \frac{B_0^2 (2\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp + \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp)^2}{\mu_0} + \gamma p_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi})^2 \right. \\ \left. - (2\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp)(\boldsymbol{\xi}_\perp \cdot \nabla p_0) + \frac{\boldsymbol{\xi}_\perp \times \mathbf{B}_{1\perp} \cdot \mathbf{B}_0 J_{0\parallel}}{B_0} \right) d\tau^3 \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde los tres primeros términos son definidos positivos, es decir que aportan a la estabilidad del plasma. El término  $-(2\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp)$  es negativo cuando la curvatura ( $\boldsymbol{\kappa} = (\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{b}}$ ) del campo y el gradiente de presión están en la misma dirección. Las inestabilidades vinculadas a este término son llamadas “inestabilidades de presión” y toman importancia cuando  $\beta$  es elevado. El último término, proporcional a  $J_{0\parallel}$ , también puede hacer que  $\delta W < 0$ . Las inestabilidades relacionadas a este término se conocen como “inesta-

bilidades de corriente”, y dependiendo del tipo de desplazamiento son conocidas como inestabilidad de “kink” (distorsión helicoidal de un toroide o un “screw-pinch”) y “tilt” (inclinación del toroide respecto al eje de simetría). Esta última proviene del término proporcional a la corriente, pero está asociada principalmente con la geometría del conservador de flujo y las condiciones de borde en caso de la utilización de campos de vacío. Para un plasma con  $\beta = 0$ ,  $p_0 = 0$ , la variación de la energía potencial resulta

$$\delta W = \frac{1}{2} \int \left( \frac{B_1^2}{\mu_0} - \frac{J_{0\parallel}(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) \cdot \mathbf{B}_{1\perp}}{B_0} \right) dr^3 \quad (3.28)$$

Adicionalmente, los equilibrios estables respecto de perturbaciones ideales, no son necesariamente estables cuando se incluye la resistividad del plasma. En estas condiciones puede producirse la rotura y reconexión de las líneas de campo magnético debido al crecimiento de la inestabilidad de “tearing” (o tearing modes). Esta inestabilidad es la versión resistiva de la inestabilidad de kink, solo que su tasa de crecimiento es bastante menor.



# Capítulo 4

## Equilibrios MHD en plasmas magnetizados

Presentamos la ecuación de Grad-Shafranov y obtenemos soluciones numéricas de equilibrios MHD en conservadores de flujo cilíndricos. Estudiamos diferentes configuraciones de campos externos y describimos el comportamiento resonante de equilibrios totalmente relajados ( $\lambda$  uniforme) y el efecto de los campos de vacío en las soluciones. Determinamos además el factor de seguridad en configuraciones con una distribución de corriente no uniforme. Comparamos los resultados obtenidos utilizando perfiles de corriente ( $\lambda(\psi)$ ) lineales o de tipo tanh.

### 4.1. Introducción

La teoría de relajación presentada en el capítulo anterior introduce los conceptos que describen al plasma como un sistema que sufre un proceso de auto-organización. A través de la minimización de la energía magnética sujeta a la condición de helicidad constante se desarrollan los pasos que conducen a la ecuación de equilibrio MHD libre de fuerzas. El estudio de las configuraciones de equilibrio puede proporcionar mucha información sobre los resultados esperados en experimentos de laboratorio, o en simulaciones numéricas de la dinámica MHD resistiva.

Con el progreso de la capacidad de cómputo se han podido obtener resultados de la dinámica MHD para todo tipo de experimentos relacionados con el confinamiento magnético. Sin embargo, a pesar de que en la mayoría de los casos estas simulaciones pueden reproducir aproximadamente los resultados experimentales, los estudios realizados usando la ecuación de equilibrio MHD ideal continúan siendo útiles debido a la rapidez, sencillez, y exactitud de los resultados obtenidos. Esto permite realizar estudios de la estabilidad, obtener estimaciones de los resultados esperados en experimentos, y definir los parámetros necesarios para lograr los resultados perseguidos.

Todos los experimentos desarrollados a lo largo del tiempo han sido estudiados partiendo de cálculos del equilibrio. Entre los trabajos relacionados con spheromaks, como el CTX, está el de Hooper et. al. [47], donde se estudian escenarios con parámetros similares a los utilizados en experimentos de inyección de helicidad. Brennan et. al. [33] analizan la estabilidad de equilibrios MHD en spheromaks con cañon coaxial, y utilizan

distribuciones de corriente del tipo lineal e hiperbólica ( $\tanh$ ). Dentro de los estudios sobre tokamaks esféricos con columna central de plasma (ST-PCC) se encuentran los trabajos de Alladio et. al. [11, 19] con el proyecto PROTO-SPHERA. En estos trabajos se propone la posibilidad de formar configuraciones toroidales mediante procesos de relajación magnética. Entre los estudios analíticos y numéricos que se llevaron a cabo se encuentra el análisis de equilibrios MHD usando los modos Chandrasekhar-Kendall-Furth (CKF) y la aplicación del principio de energía para estudiar la estabilidad (ver sección 3.6). Por otro lado, la propuesta de configuraciones híbridas en las que se agrega un cañón coaxial a un ST-PCC (ST-PCC-CG) fue presentada por Tang & Boozer [12], quienes analizan los equilibrios de configuraciones totalmente relajadas en función del parámetro  $\lambda$  y la elongación.

Debido al creciente interés en configuraciones tipo tokamak esférico, la propuesta de lograr configuraciones magnéticas similares reduciendo el costo es aún más atractiva. En este capítulo analizamos los equilibrios de configuraciones similares al spheromak con cañón coaxial, al tokamak esférico con columna central de plasma, y configuraciones híbridas entre estas dos. Estudiamos el efecto de modificar los campos de vacío (campos magnéticos externos) y la cantidad de energía magnética para estados de Taylor. También analizamos las diferencias entre utilizar perfiles de corriente ( $\lambda$ ) del tipo lineal o tangente hiperbólica, similares a los utilizados en el trabajo de Brennan[33]. Los resultados contribuyen al entendimiento de la respuesta de la configuración y aportan información sobre los resultados esperados cuando se utilizan parámetros dentro de los rangos de estabilidad [18, 33, 34, 45, 46].

## 4.2. Ecuación de Grad-Shafranov

Consideramos un plasma ideal en equilibrio estático ( $\partial/\partial t = 0$ ,  $\mathbf{u} = 0$ ). De la ecuación de momento (2.4) se obtiene el balance entre la fuerza de Lorentz y el gradiente de presión.

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \nabla p \quad (4.1)$$

La ecuación de Grad-Shafranov (G-S) se deduce de la ecuación de equilibrio (4.1). Es una ecuación 2D para configuraciones axisimétricas ( $\partial/\partial\phi = 0$ ) que relaciona el flujo magnético poloidal ( $\psi$ ) (ver sec. 1.2.2) con la presión hidrodinámica ( $p$ ) y la corriente poloidal ( $I_p$ ).

Dado que el campo magnético es solenoidal ( $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ), en configuraciones axisimétricas el flujo poloidal cumple un papel análogo al de la función corriente en fluidos neutros incompresibles. Por lo tanto, las componentes  $B_r$  y  $B_z$  pueden expresarse como

$$B_r = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial\psi}{\partial z} \quad ; \quad B_z = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial\psi}{\partial r} \quad (4.2)$$

donde  $\psi$  es el flujo poloidal (ec. (1.8)).

La deducción de la ecuación de Grad-Shafranov requiere de una serie de pasos que no desarrollaremos en esta tesis y pueden consultarse en la bibliografía [23]. Las expresiones definidas en (4.2), se reemplazan en la ley de Ampere (2.1) (ii) y en la ecuación de momento (4.1). Luego, la proyección de la ecuación de momento (4.1) en

las direcciones  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{J}$  y  $\nabla\psi$  permite obtener la ecuación:

$$\Delta^*\psi = -\mu_0 r^2 \frac{dp}{d\psi} - \frac{1}{8\pi^2} \frac{dI_p^2}{d\psi} \quad (4.3)$$

conocida como ecuación de Grad-Shafranov. En (4.3)  $p$  e  $I_p$  son la presión y la corriente poloidal consideradas cantidades de superficie ( $p = p(\psi)$ ,  $I_p = I_p(\psi)$ ), y el miembro de la izquierda  $\Delta^*\psi$  puede escribirse en la forma

$$\Delta^*\psi = r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (4.4)$$

La ecuación de Grad-Shafranov es una ecuación de segundo orden no lineal, los términos  $p$  e  $I_p$  son términos libres que pueden ser definidos de manera arbitraria como cantidades de superficie ( $\propto f(\psi)$ ). La ecuación permite calcular equilibrios MHD ideales axi-simétricos para spheromaks, tokamaks, etc. con geometrías arbitrarias utilizando el sistema de coordenadas más conveniente. La dificultad para hallar las soluciones analíticas o numéricas dependerá de la geometría, de las condiciones de contorno y de la definición de los términos  $p(\psi)$  e  $I_p(\psi)$ . En esta tesis resolveremos la ecuación de G-S de manera numérica utilizando un sistema de coordenadas cilíndrico axisimétrico  $(r, z)$ . La descripción del método numérico empleado y las condiciones de borde utilizadas se presentan en las siguientes secciones (4.3 y 4.4).

Si suponemos que los equilibrios corresponden a estados libres de fuerzas totalmente relajados (estados de Taylor) podemos hacer  $\beta = 0$  ( $dp/d\psi = 0$ ) y  $\mu_0 \mathbf{J} = \lambda \mathbf{B}$ , con  $\lambda$  uniforme. Esto reduce la ecuación de G-S (4.3) a la siguiente expresión

$$\Delta^*\psi = -(\lambda/\mu_0)^2 \psi \quad (4.5)$$

donde el término de la corriente poloidal es  $I_p(\psi) = \mu_0^{-1} \int_0^\psi \lambda d\tilde{\psi} = \mu_0^{-1} \lambda \psi$ . Por lo tanto, la ecuación de G-S general (4.3) se reduce a una ecuación diferencial lineal para equilibrios correspondientes a estados de Taylor. Esto implica que en algunos casos aislados podremos hallar una solución analítica cuando las condiciones de borde sean suficientemente simples.

El campo magnético y la densidad de corriente total se pueden calcular de la siguiente manera

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2\pi r} \nabla\psi \times \hat{e}_\phi + \frac{I_p}{2\pi r} \hat{e}_\phi \quad (4.6)$$

$$\mu_0 \mathbf{J} = \frac{1}{2\pi r} \frac{dI_p}{d\psi} \nabla\psi \times \hat{e}_\phi - \frac{1}{2\pi r} \Delta^*\psi \hat{e}_\phi \quad (4.7)$$

### 4.3. Resolución numérica de la ecuación de Grad-Shafranov

La ecuación (4.3) se resuelve en una región bidimensional  $\Omega_S : (r, z) = (0, a) \times (-h/2, h/2)$ , donde  $a$  es el radio del cilindro y  $h$  la altura. Muchas veces nos referiremos a la elongación ( $e$ ) del cilindro, definida de la forma  $e = h/a$ . Si observamos la ecuación (4.3), vemos que la misma tiene un término lineal en el miembro de la izquierda ( $\Delta^*\psi$ ),

y dos términos en el miembro derecho que en principio pueden ser no lineales. Por conveniencia, vamos a utilizar una normalización en la que  $\mu_0 = 1$ , y reescribir el término asociado a la presión hidrodinámica como  $r^2 p'$  y el relacionado con la corriente del plasma como  $FF'$ , quedando la ecuación (4.3) de la forma:

$$-\Delta^* \psi = r^2 p' + FF' \quad (4.8)$$

donde  $F = F(\psi)$  se relaciona con la corriente poloidal,  $I_p = 2\pi F(\psi)$ .

Buscamos resolver la ecuación (4.8) en una grilla cartesiana mediante diferencias finitas. Para ello, el método consiste en encontrar una función  $\psi$  que satisfaga

$$G(\psi) = 0 \quad (4.9)$$

con  $G(\psi) \equiv \Delta^* \psi + f(\psi)$ , donde  $f(\psi) = r^2 p' + FF'$ . Vamos a llamar  $\psi_h$  al flujo poloidal discretizado, donde el subíndice  $h$  indica la aproximación discreta de una función o un operador diferencial. Por simplicidad, usamos una grilla cartesiana con  $N = N_r \times N_z$  puntos interiores, con una distribución de puntos de grilla que están posicionados en  $(r_i, z_j)$ , y donde la posición radial es  $r_i = i \times h_r$  con  $i = 1, \dots, N_r$ , y la axial  $z_j = -ea/2 + j \times h_z$  con  $j = 1, \dots, N_z$ . La separación entre los nodos de la grilla está dada por:  $h_r = a/(N_r + 1)$  y  $h_z = ea/(N_z + 1)$ . Usando este esquema, El operador diferencial lineal de la ecuación (4.8) puede escribirse mediante diferencias finitas centradas:

$$\begin{aligned} \Delta^* \psi(r_i, z_j) \approx (\Delta_h^*)_{ij} \equiv & \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{h_r^2} - \\ & \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2r_i h_r} + \\ & \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{h_z^2} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Notemos que  $\psi_h$ , que está definido en una grilla 2D con valores  $\psi_{ij}$ , puede ser considerado como un vector columna  $\psi_I$ , con  $I = 1, \dots, N$ . Con esto en mente, es fácil ver que la forma discreta del operador diferencial de Grad-Shafranov puede ser expresada en una matriz de  $N \times N$ , que llamaremos  $A_h$ . Entonces, la ecuación (4.9) puede aproximarse como

$$G_h(\psi_h) = A_h \psi_h + f(\psi_h) = 0 \quad (4.11)$$

Esto representa un sistema de ecuaciones no lineal, de  $N$  ecuaciones con  $N$  incógnitas. El problema (4.11) puede resolverse usando el método de Newton-Raphson, que consiste en suponer que si  $\psi_h^k$  es una solución aproximada a los ceros de (4.11), podremos aproximarnos a la solución resolviendo de manera iterativa el sistema lineal

$$J_G(\psi_h^k)(\psi_h^{k+1} - \psi_h^k) = -G_h(\psi_h^k) \quad (4.12)$$

con incógnitas  $(\psi_h^{k+1} - \psi_h^k)$ . El término  $J_G(\psi_h)$ , de dimensión  $(N \times N)$ , es la matriz jacobiana, y contiene las derivadas de primer orden de  $G_h(\psi_h)$  que se computan fácilmente



como

$$J_G(\psi_h) = A_h + If'(\psi_h) \quad (4.13)$$

El método permite resolver ecuaciones lineales y no lineales de manera sencilla y eficiente. Sin embargo, como el método de Newton-Raphson utiliza una aproximación a primer orden (ec. (4.13)), al usar los términos no lineales en  $f(\psi)$ , y si las semillas iniciales se encuentran muy alejadas de la solución real, puede haber algunas dificultades con la convergencia hacia la solución. Este inconveniente se puede solucionar de manera sencilla llevando a cabo una aproximación progresiva de los parámetros relacionados con la presión y la corriente hacia el problema que se quiere resolver.

El método que describimos fue utilizado para calcular equilibrios MHD ideales para configuraciones con condiciones de borde no uniformes y grillas con resolución  $100 \times 100e$ . Por una cuestión de interés práctico, y por compatibilidad general con los problemas de dinámica MHD resistiva que describiremos en los siguientes capítulos, en esta tesis se utilizó solo el término de densidad de corriente, que equivale a suponer un plasma libre de fuerzas ( $dp/d\psi = 0$ , o  $\beta = 0$ ).

## 4.4. Configuración de campos externos

En la sección 1.3 describimos al ST-PCC como una alternativa al tokamak esférico. La principal característica que lo diferencia de un tokamak es la columna central de plasma, que se genera mediante bobinas y electrodos ubicados en la superficie de un conservador de flujo. En esta sección describiremos la configuración de campos de vacío, que es el resultado de los campos externos aplicados sobre un conservador de flujo cilíndrico. Las condiciones de borde aquí descritas determinan el tipo de configuración resultante. Podemos distinguir tres tipos de configuraciones de campos de vacío que usaremos a lo largo de esta tesis. Estas son: el spheromak con cañon coaxial, que llamaremos CG (en inglés Coaxial Gun) [3, 18, 34, 48, 49], el tokamak esférico con columna central de plasma ST-PCC (en inglés Spherical Tokamak with Plasma Center Column), y una combinación híbrida entre estos dos casos (ST-PCC-CG). Veremos que finalmente esta clasificación puede ser resumida mediante un parámetro adimensional  $f$ , equivalente a la relación de flujos que atraviesan los electrodos en cada configuración.

### Condiciones de borde y campos de vacío

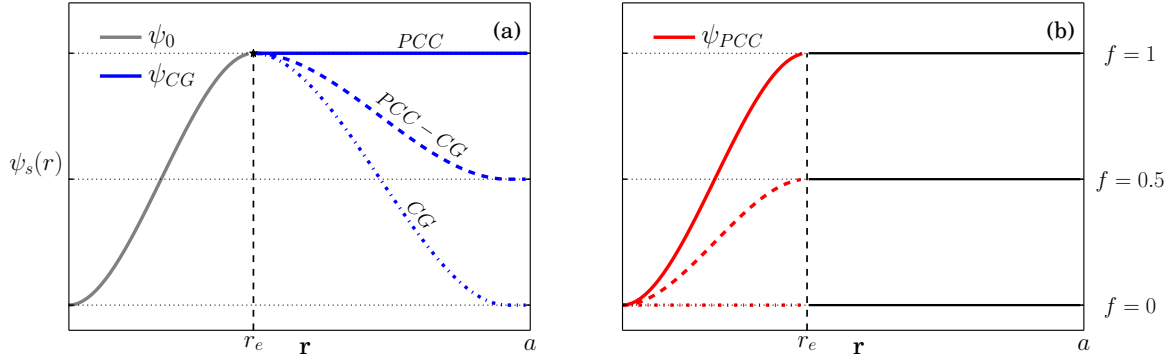
Consideramos un conservador de flujo cilíndrico definido por el volumen  $\Omega_V : (r, \phi, z) = [0, a] \times [0, 2\pi] \times [-h/2, h/2]$ . La distribución de flujo magnético que atraviesa la superficie que delimita el volumen es similar a la empleada para simular configuraciones como el SPHEX [33] (CG), el experimento PROTO-SPHERA [11] (PCC), y las configuraciones propuestas por Tang & Boozer (2006) [12] (CG-PCC). Las diferencias radican en la distribución de campos magnéticos aplicados en las superficies del cilindro  $\Omega_S(r, \pm h/2)$ .

El campo de vacío generado por los conductores externos, puede obtenerse de ma-

nera sencilla resolviendo numéricamente la ecuación de G-S (4.3) con  $f(\psi) = 0$ :

$$\begin{cases} \Delta^* \psi(r, z) = 0 & ; \text{ en } \Omega = (r, z) \in [0, a] \times [-h/2, h/2] \\ \psi = \psi_s & ; \text{ en } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.14)$$

donde  $\psi_s(r)$  en  $z \pm h/2$ , es el flujo magnético de los campos externos aplicados en las superficies del cilindro. Estas son funciones polinómicas definidas por tramos a lo largo del radio de la superficie circular. En la figura 4.1 se muestran en detalle las funciones  $\psi_s(r)$  que hemos mencionado, y que se aplican en los contornos  $z \pm h/2$  de la geometría a utilizar.



**Figura 4.1:** Condiciones de contorno utilizadas para resolver la ecuación de Grad-Shafranov (4.3). Se muestran ejemplos de tres configuraciones; con  $f = 0$  (CG);  $f = 0.5$  (PCC-CG) y  $f = 1$  (PCC). Los gráficos en (a) corresponden a  $\psi_s$  en la superficie  $z = -h/2$ , en (b) a la superficie  $z = h/2$ .

Para obtener las funciones  $\psi_s(r)$  se utilizaron argumentos similares a los empleados en el trabajo de Brennan et al. (2002) [33]. Sin embargo, en nuestro caso las condiciones son tales que  $\psi'_s(r) = 0$  en  $r = (0, r_e, a)$ . Esto no solo permite obtener la forma del flujo, sino también es necesario para que  $B_z|_{r=0} = B_0$  y  $B_z|_{r=a} = 0$  (ver (4.2)). Otra de las condiciones que deben satisfacer las funciones es que  $\psi_s(a)|_{z=-h/2} = \psi_s(a)|_{z=h/2}$  para la conservación del flujo magnético.

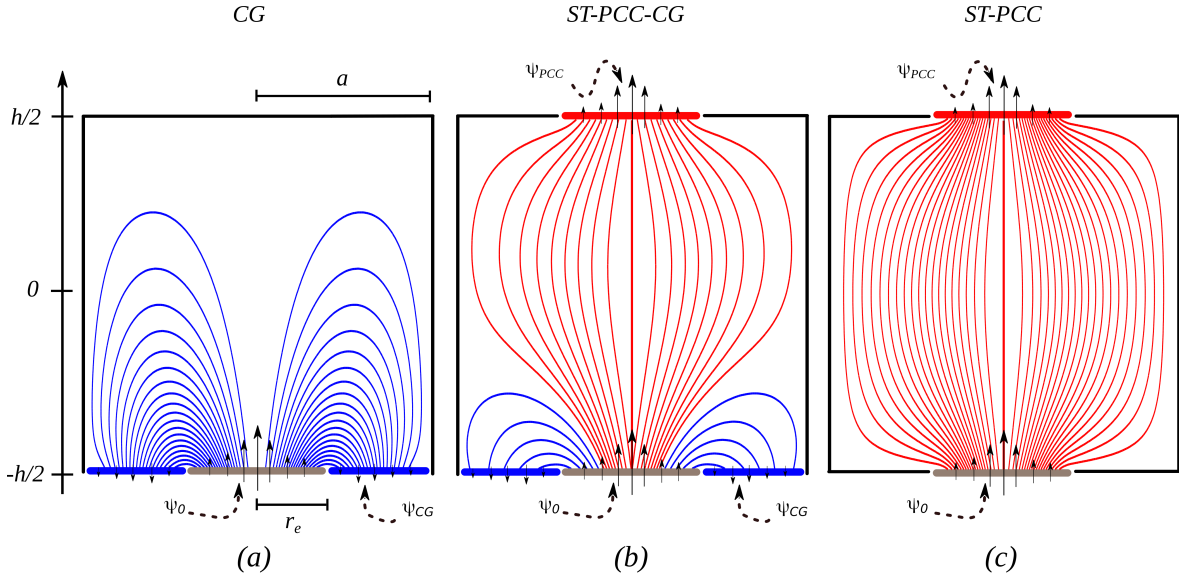
A lo largo de la tesis usaremos el parámetro adimensional  $f$  para relacionar el flujo magnético máximo del electrodo inferior ( $\psi_0$ ), con el máximo del electrodo superior ( $\psi_{PCC}$ ) (ver fig. 4.1), de la siguiente manera:

$$f = \frac{\psi_{PCC}}{\psi_0} \Big|_{r_e} \quad (4.15)$$

Esto permite distinguir entre configuraciones con  $f = 1$  (PCC), donde todo el flujo magnético de vacío que ingresa por la superficie inferior ( $z = -h/2$ ) sale por la superior ( $z = h/2$ ), de aquellas con  $f = 0$  (CG) en las que todo el flujo ingresa y sale por la misma superficie ( $z = -h/2$  en nuestro caso), o configuraciones híbridas, con  $0 < f < 1$ , que son una combinación de electrodos (PCC-CG), ver figura 4.1. Es importante aclarar que la relación de flujos es un parámetro que podemos controlar con libertad, la elección de los valores de  $f$  usados en la figura 4.1 es solo a modo de ejemplo.

Las condiciones de contorno definen la configuración de campos y el tipo de dispositivo de confinamiento. Los campos de vacío dentro del conservador de flujo que se

obtuvieron al resolver (4.14) dan como resultado los esquemas mostrados en la figura 4.2 .



**Figura 4.2:** Aspectos generales de la geometría en el plano  $r-z$ , y los campos de vacío obtenidos al resolver (4.14) con las condiciones de contorno de la figura 4.1.

Definidos los parámetros geométricos y las condiciones de borde, el siguiente paso es considerar los términos que aparecen en la función  $f(\psi)$ , para obtener los equilibrios de interés al considerar una cantidad no nula de helicidad magnética relativa ( $H_{rel}$ ). Distinguiremos los equilibrios totalmente relajados ( $\lambda$  uniforme) de aquellos en los que  $\lambda$  es función del flujo magnético ( $\lambda(\psi)$ ).

## 4.5. Equilibrios totalmente relajados

En esta sección estudiaremos plasmas en equilibrio MHD totalmente relajado, es decir, cuando  $\beta = 0$  y  $\mathbf{J} = \lambda \mathbf{B}$  con  $\lambda$  uniforme (estado de Taylor). Los equilibrios MHD con estas características presentan una ventaja particular para resolver la ecuación de Grad-Shafranov. Al transformar el término asociado a la distribución de corrientes en  $I_p = \lambda \psi$ , se obtiene una ecuación de G-S lineal (4.5), numéricamente sencilla de resolver cuya solución puede escribirse mediante una combinación lineal independiente de términos que satisfacen (4.5).

La cantidad de energía que contiene el plasma está directamente relacionada con la corriente ( $\lambda$ ) que posee la configuración. Como hemos visto en la sección 3.5.2, la forma en que se relacionan estas cantidades está dada por  $\lambda = 2W/H$ . Por lo tanto, en la ecuación de equilibrio (4.5) el parámetro  $\lambda$  es el factor de relevancia que define a la relación entre los contenidos de helicidad y energía magnética del plasma. Los valores de  $\lambda$  que se tomaron para resolver (4.5), están entre 0 y  $k_1$ .

Veremos que si el parámetro  $\lambda$  es suficientemente grande obtendremos suficiente cantidad de corriente toroidal, lo que permitirá la aparición de superficies magnéticas cerradas. Esta es una condición fundamental en dispositivos de confinamiento magnético. La existencia de superficies cerradas, y la cantidad de flujo encerrado en ellas, puede

determinarse comparando el flujo poloidal máximo ( $\psi_{max}$ ) con el flujo total que atraviesa el conservador de flujo ( $\psi_0$ ) (ver fig 4.1). Para cuantificar esto se introduce el factor de amplificación, definido en la forma:

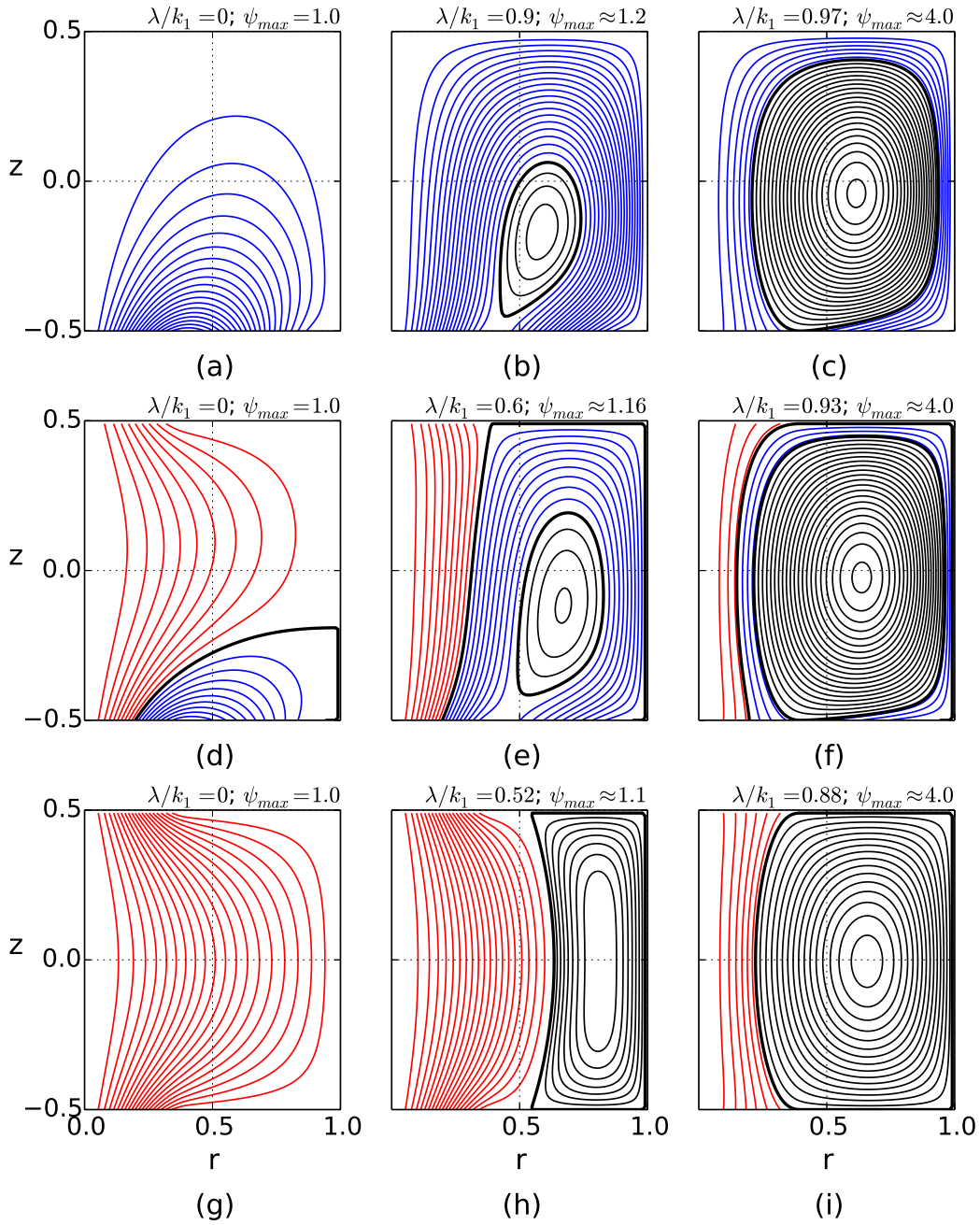
$$\mathcal{A} = \frac{\psi_{max}}{\psi_0} \quad (4.16)$$

De lo que se dijo anteriormente, se deduce que si  $\mathcal{A} > 1$ , habrá superficies magnéticas cerradas en nuestras soluciones. Por otro lado, veremos que cuando  $\lambda \rightarrow k_1$ , la solución diverge y por lo tanto  $\mathcal{A} \rightarrow \infty$ . Como la cantidad de flujo magnético poloidal depende de la corriente que circula por el plasma, el factor de amplificación es un indicador del flujo generado por la corriente toroidal.

En experimentos como el CTX [50], SSPX [51], SPHEX[10], etc., el límite superior del factor de amplificación alcanzado en etapa de sostenimiento, se encuentra en  $\mathcal{A} \approx 4$ . Aunque el modelo MHD predice la posibilidad de obtener estados cuasi-estacionarios con factor de amplificación más elevados, se ha demostrado que este valor es un máximo asintótico al incrementar la corriente entre electrodos. Por lo tanto, es de suponer que el mecanismo físico que determina este comportamiento se encuentre alejado de la dinámica MHD resistiva.

#### 4.5.1. Superficies de flujo

Por conveniencia, a lo largo de la tesis hemos normalizado las ecuaciones tomando  $a = 1$  y  $\psi_0|_{r_e} = 1$ . En la figura 4.3, se muestran resultados obtenidos resolviendo numéricamente la ecuación (4.5) con las condiciones de contorno 4.1 y elongación  $e = h/a = 1$ . El flujo poloidal obtenido de la ecuación diferencial está representado por curvas de nivel en el plano  $(r, z)$ . Los casos mostrados son ejemplos de las configuraciones que podrían obtenerse mediante procesos de relajación magnética. Las zonas con superficies magnéticas cerradas, representadas con líneas de color negro, son superficies con  $\psi > 1$ . El punto donde el flujo alcanza su máximo valor  $\psi_{max}$  se llama eje magnético. Las líneas negras de trazo grueso de las figuras son contornos con  $\psi = 1$ , y para figuras d, e, y f se muestra además el contorno  $\psi = 0.5$  debido a que  $f = 0.5$ . Estos contornos se conocen como separatriz, e indican la zona que divide dos regiones magnéticas, con configuraciones topológicamente diferentes.

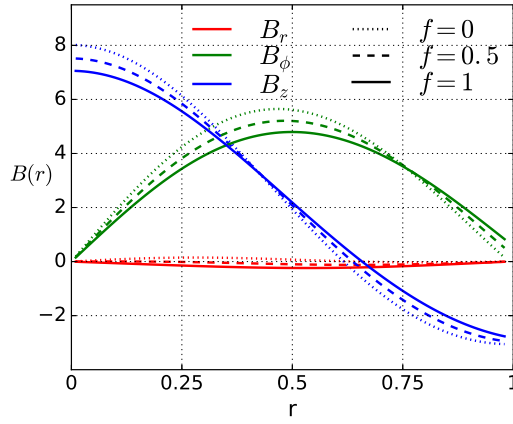


**Figura 4.3:** Las figuras muestran contornos de flujo obtenidos resolviendo la ecuación (4.5) para un cilindro con elongación  $e = 1$  y tres valores de  $\lambda$ . En (a-c)  $f = 0$ , en (d-f)  $f = 0.5$  y en (g-i)  $f = 1$ . Las líneas en color negro identifican la zona de superficies magnéticas cerradas, las de color rojo las líneas que salen por el electrodo superior y las azules las que retornan a la cara inferior (ver fig. 4.2).

#### 4.5.2. Perfiles de campo magnético

En la figura 4.4 se muestran los perfiles de las tres componentes del campo magnético ( $B_r$ ,  $B_\phi$  y  $B_z$ ) en función de  $r$ , calculadas a la altura  $z$  correspondiente al eje magnético. En todos los casos el factor de amplificación es aproximadamente 4 ( $\mathcal{A} \approx 4$ ). El cálculo se realizó utilizando las ecuaciones (4.2), y (4.6) con  $I_p = \lambda\psi$  (solo para estados de Taylor).

Vemos en la figura que al incrementar  $f$  la magnitud de las componentes de campo  $B_z$  y  $B_\phi$  se modifica y el máximo de  $B_\phi$  se desplaza hacia la derecha. Esto ocurre porque el flujo magnético de retorno (líneas azules en las figuras 4.2 y 4.3) disminuye al aumentar  $f$  y desplaza el eje magnético. Por otro lado, al modificar  $f$  estamos modificando la distribución de corriente entre electrodos (región con  $\psi < 1$ ), permitiendo que cuando  $f = 1$  toda la corriente que ingresa por el electrodo inferior salga por el superior. De acuerdo con la ley de Ampere (2.1) (ii), la integral de línea cerrada de  $B_\phi$  sobre  $r = a$  da como resultado la cantidad de corriente  $I_z$  que atraviesa el electrodo superior. Si bien no es muy notable en la figura,  $B_\phi(r = a)$  aumenta con  $f$ . Esto es importante porque modifica el perfil del factor de seguridad ( $q$ ) que introduciremos en la sección 4.7.



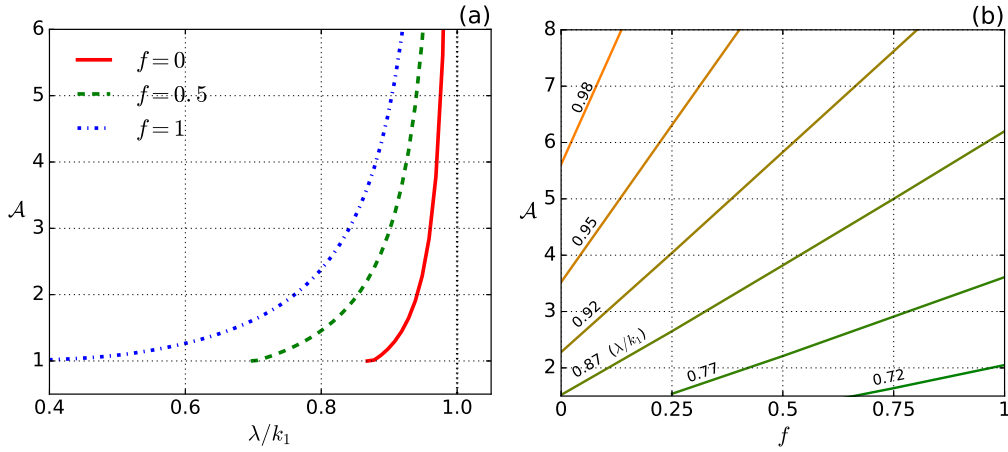
**Figura 4.4:** Se muestran los perfiles de las componentes del campo magnético  $B_r$ ,  $B_\phi$  y  $B_z$  calculadas a la altura  $z$  del eje magnético para los casos con  $\psi \approx 4$  de la figura 4.3.

Veremos en la sección 4.6 que la disminución del máximo del campo toroidal al incrementar  $f$ , puede contrarrestarse si permitimos que  $\lambda$  sea una función del flujo magnético  $\psi$ , con  $\lambda$  más elevado en las regiones con  $\psi < 1$  que en el resto del volumen. Esto permite modificar los perfiles de corriente  $J_z$  en la columna y lograr perfiles más pronunciados de la componente  $B_\phi$ .

### 4.5.3. Factor de amplificación y primer autoestado

Analizando la variación del factor de amplificación (4.16) en función del parámetro  $\lambda$ , vemos algunos aspectos importantes relacionados con los equilibrios de plasmas magnetizados. En las figuras 4.5 (a) y (b) se muestran el factor de amplificación en función de  $\lambda/k_1$  y el comportamiento en función de la relación de flujos  $f$  respectivamente para las configuraciones mostradas en la fig. 4.3. De la figura (a) se puede notar el comportamiento asintótico y divergente (o “resonante”) de  $\mathcal{A}$  al aproximarse  $\lambda$  al autovalor  $k_1$ , y el efecto de los campos de vacío (o  $f$ ) actuando sobre el factor de amplificación.

Los campos externos cumplen un rol interesante en las soluciones. En las figuras 4.3 se observa que el campo externo comprime la configuración magnética cerrada,



**Figura 4.5:** Factor de amplificación  $\mathcal{A}$  para un cilindro de elongación  $e = 1.0$  ( $k_1 \approx 4.955$ ), (a) en función del parámetro  $\lambda$  para casos con  $f = 0, 0.5$  y  $1.0$ , y (b) en función de  $f$ , para distintos valores de  $\lambda$  (indicado en las curvas)

modificando la ubicación del eje magnético y la relación de aspecto  $\epsilon$  definida como:

$$\epsilon = \frac{r_a - r_s}{r_a} \quad (4.17)$$

donde  $r_a$  y  $r_s$  son los radios del eje magnético y la separatriz, respectivamente. Como se mencionó en 4.5, la ecuación de Grad-Shafranov es lineal cuando  $\lambda$  es uniforme y por lo tanto la solución puede ser escrita como la suma de un término de vacío más una combinación lineal de las auto-funciones obtenidas para un conservador de flujo aislado [12], que satisfacen (4.5). Es decir,  $\psi$  puede escribirse como:

$$\psi = \psi_v + \sum_m c_m \chi_m \quad (4.18)$$

donde  $\psi_v$  es el flujo magnético del campo de vacío y  $c_m$  los coeficientes que acompañan a las autofunciones  $\chi_m$ , que satisfacen

$$\Delta^* \chi_m + k_m^2 \chi_m = 0 ; \quad \chi_m|_{\partial\Omega} = 0 \quad (4.19)$$

donde  $k_m$  con  $m = 1$  es el autovalor del primer modo de Chandrasekhar-Kendall. Los coeficientes  $c_m$  pueden ser escritos en la forma[52]:

$$c_m = \frac{\lambda}{k_m^2 - \lambda^2} \langle \psi_v \chi_m \rangle \quad (4.20)$$

donde  $\langle \dots \rangle = 1/2\pi \int_{\Omega} \dots 1/r^2 dr^3$ . Si observamos en la ecuación anterior, cuando  $\lambda$  se aproxima al autovalor  $k_m$ , el coeficiente  $c_m$  diverge. El efecto del campo de vacío se hace sentir en las condiciones de borde al variar la relación de flujos  $f$ , afectando de manera directa el peso relativo entre el campo de vacío y las soluciones al problema homogéneo ( $\psi|_{\partial\Omega} = 0$ ). Esto se comprueba al observar el crecimiento relativo de  $\mathcal{A}$  para los casos con  $f = 0, 0.5$  y  $1$  de la figura 4.5-b. El peso relativo de  $c_m \chi_m$  respecto a  $\psi_v$  es menos importante cuando  $f = 0$ , que cuando  $f > 0$ . El crecimiento del flujo magnético  $\psi$  para



equilibrios con  $f = 0$  solo se hace notable cuando  $\lambda$  se encuentra muy próximo al valor de resonancia, es decir, cuando el término  $\lambda^2/(\lambda^2 - k_1^2)$  es suficientemente grande. Por lo tanto, la diferencia entre equilibrios la establecen las integrales  $\langle \psi_v \chi_m \rangle$ . Se puede deducir de la figura 4.5-b que:

$$\langle \psi_v \chi_m \rangle|_{f=0} < \langle \psi_v \chi_m \rangle|_{f=0.5} < \langle \psi_v \chi_m \rangle|_{f=1} \quad (4.21)$$

Veremos en el capítulo 5 que la configuración del campo de vacío y la geometría tienen un gran efecto sobre la estabilidad de los equilibrios. Esto está asociado a que podremos lograr la aparición de modos no axi-simétricos ( $n = 1, 3, 5, \dots$ ) de menor energía magnética que los axi-simétricos, variando la elongación del cilindro y  $f$ . Lograr configuraciones con alto factor de amplificación, pero menor  $\lambda$ , será vital para la estabilidad.

## 4.6. Equilibrios con $\lambda$ no uniforme (energía libre)

En los experimentos de confinamiento magnético es común que el plasma posea valores no uniformes de  $\lambda$ . Por un lado, esto puede darse cuando  $\beta$  es elevado y no es posible lograr una configuración donde toda la corriente pueda escribirse como  $\mathbf{J} = \lambda \mathbf{B}$ . Por otro lado, en muchos casos se requieren configuraciones en las que la densidad de corriente (o  $\lambda = \mathbf{J} \cdot \mathbf{B}/B^2$ ) se conserve elevada en determinadas regiones del plasma. Esto se hace para que los procesos de relajación magnética distribuyan la energía libre concentrada en zonas de  $\lambda$  elevado hacia regiones de menor energía.

Para que se establezca un flujo de energía magnética hacia las zonas del plasma con superficies magnéticas cerradas, se busca incrementar la densidad de corriente en la columna central. Esto da como resultado configuraciones que adquieren un perfil de corriente con valores de  $\lambda(\psi)$  elevados en la zona de campos abiertos ( $\psi < 1$ ), y niveles más bajos en las zonas cercanas al eje magnético. No está claro cual será el perfil de corriente alcanzado en situaciones cuasi-estacionarias, ya que puede variar al modificar la configuración y dependerá de las condiciones del plasma. Algunas mediciones realizadas en el experimento SPHEX mostraron que los perfiles de  $\lambda$  pueden tener una dependencia del tipo “*tanh*” con  $\psi$  [40], aunque el más estudiado por la comunidad científica es el perfil del tipo lineal [33]. El perfil tipo tangente hiperbólica de  $\lambda$  como función del flujo magnético  $\psi$  se puede escribir como:

$$\lambda(\psi) = c_0 + c_1 \tanh[\delta(1 - \psi)] \quad (4.22)$$

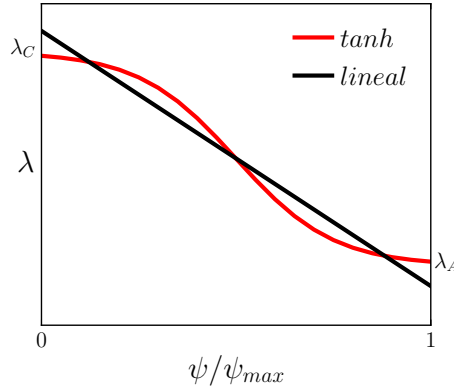
donde el ancho del “escalón” de la función puede ajustarse con el parámetro  $\delta$ . El primer término del miembro de la derecha puede escribirse en la forma:  $c_0 = c_1 + \lambda_A$ , donde  $c_1 = (\lambda_C - \lambda_A)/2$  siendo  $\lambda_A$  el valor de  $\lambda(\psi)$  en la zona de superficies cerradas y  $\lambda_C$  el valor en la columna magnética. Por otro lado, el perfil lineal de  $\lambda$  se escribe:

$$\lambda(\psi) = \bar{\lambda} \left[ 1 + \alpha \left( \frac{2\psi}{\psi_{max}} - 1 \right) \right] \quad (4.23)$$

donde  $\bar{\lambda}$  ( $= \langle \lambda \rangle$ ) es el promedio de  $\lambda$  en el volumen y  $\alpha$  es el parámetro que define



la pendiente de la recta. que resulta negativo cuando hay forzado. Está claro que la



**Figura 4.6:** Ejemplo comparativo de los perfiles de  $\lambda$  en función de  $\psi/\psi_{max}$  usando dependencias *tanh* y lineal.

ecuación de Grad-Shafranov deja de ser lineal si se utiliza cualquiera de estas hipótesis. Resulta evidente que si el perfil de  $\lambda$  varía se modifican también los perfiles de campo magnético.

Veremos más adelante que un equilibrio con perfil de  $\lambda$  no uniforme puede conducir a la aparición de inestabilidades ideales o resistivas relacionadas con el gradiente de  $\lambda$ .

## 4.7. Factor de seguridad (q)

El factor de seguridad para la región toroidal ( $\psi > 1$ ) se define como la cantidad de vueltas en dirección toroidal que realiza una línea magnética para completar una vuelta en dirección poloidal. El factor de seguridad es una cantidad de superficie que resulta muy útil para analizar la estabilidad del plasma. Partiendo de su definición resulta claro que puede calcularse integrando a lo largo de una línea cerrada en el plano poloidal de la siguiente manera:

$$q = \frac{1}{2\pi r} \oint_c \frac{B_\phi}{B_{pol}} dl \quad (4.24)$$

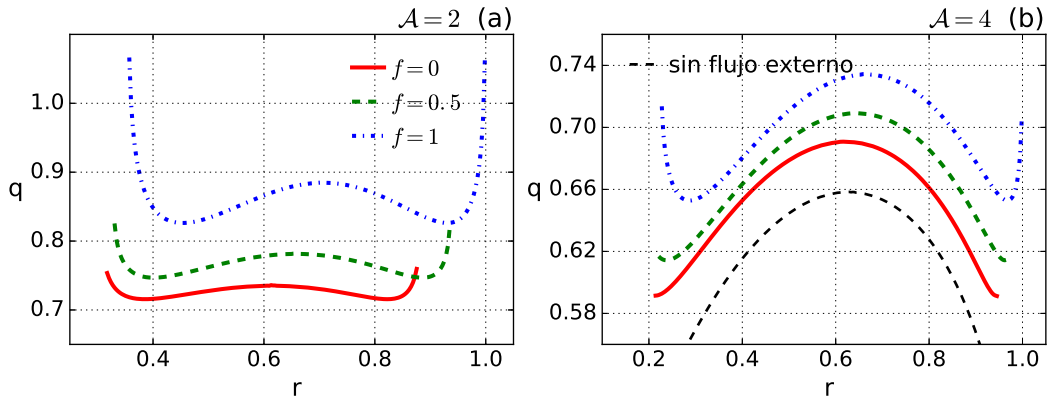
La manera más intuitiva de comprender el significado de  $q$  es usando el concepto de “línea” magnética. Si en una superficie magnética  $q$  tiene un valor racional significa que la trayectoria trazada por la línea magnética regresa al mismo punto de partida al realizar  $n$  vueltas toroidales y  $m$  poloidales ( $q = n/m$ ). Es importante notar que esta definición del factor de seguridad asume la existencia de superficies magnéticas toroidales y por lo tanto sólo es aplicable en la región donde tales superficies existen. Esto se ve reflejado en los gráficos de las figuras 4.7-4.8, donde sólo se grafica el perfil de  $q$  en la región con superficies magnéticas toroidales. En el capítulo 5 veremos que es posible extender la definición a la columna central y que en este caso también proporciona valiosa información respecto de la estabilidad de la misma.

El perfil de  $q$  proporciona mucha información sobre las características de los campos magnéticos. Su valor puede variar debido a cambios en la configuración geométrica, las condiciones de borde o la cantidad y distribución de corriente a través del perfil  $\lambda$ .

Con respecto a la configuración geométrica, por ejemplo, en un cilindro depende de la elongación  $e = h/a$ . Esto se puede demostrar de manera analítica calculando el valor de  $q$  en  $\psi = 0$  para un equilibrio con  $\lambda$  uniforme en un cilindro aislado, dando como resultado [12]:

$$q(\psi = 0) = \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{x_{11}}{\pi}\right) \left(\frac{h}{a}\right)^2 + 1} \quad (4.25)$$

donde  $x_{11}$  es el primer cero de  $J_1$ . Como puede observarse en la ecuación anterior,  $q(0)$  aumenta con la elongación del cilindro. En la figura 4.7 se muestran los perfiles de  $q$  correspondientes a equilibrios totalmente relajados para  $f = (0; 0.5; 1)$  y factor de amplificación  $\mathcal{A} = 2$  y 4.



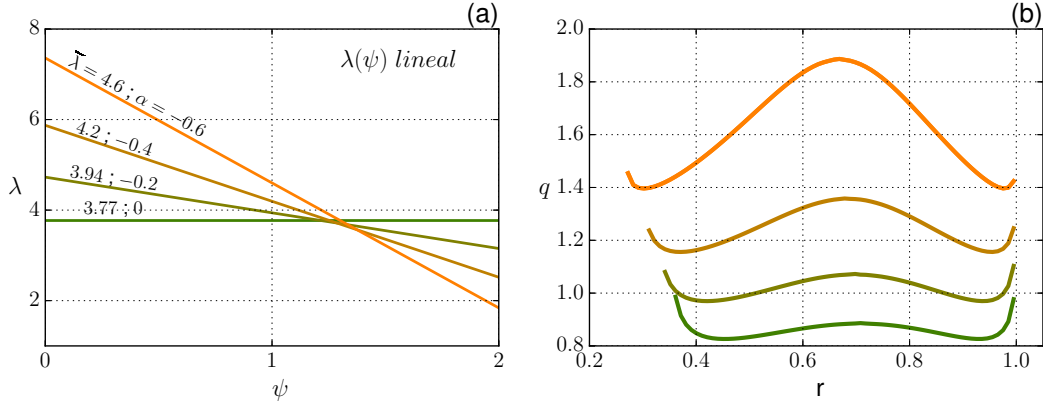
**Figura 4.7:** Perfiles de  $q$  para equilibrios totalmente relajados y su dependencia con la relación de flujos  $f$ . En (a) equilibrios con  $\mathcal{A} = 2$ , y en (b)  $\mathcal{A} = 4$ . La línea a trazos de color negro en (b) muestra el perfil de  $q$  que se obtendría para un equilibrio dentro de un conservador de flujo aislado.

Vemos en la figura 4.7 que el valor de  $q$  es más elevado para los equilibrios con  $f = 1$  y más bajo cuando  $f = 0$ , para un mismo valor de  $\mathcal{A}$ . Por otro lado, también se destaca que el valor de  $q$  en la separatriz es mayor para equilibrios con  $f$  elevado y que en situaciones de bajo factor de amplificación se logra obtener una mayor diferencia entre  $q_a$  y  $q_w$  cuando  $f = 1$ . El rol que cumple la configuración de campos externos, es el de modificar los valores y el perfil de  $q$ . Esto tiene especial interés en la búsqueda de configuraciones que tengan más estabilidad y mejor confinamiento. Algunos de estos detalles serán desarrollados en los capítulos siguientes.

Otra observación importante es que el perfil de  $q$  tiende a los valores de la configuración sin campos externos al incrementar  $\lambda$  (o  $\mathcal{A}$ ). Esta es otra de las características resonantes que se observan al tender  $\lambda \rightarrow k_1$ . Esta información es de mucha importancia, ya que si el objetivo es conseguir equilibrios con determinado tipo de perfil de  $q$ , sabremos que un valor de  $\lambda$  cercano a  $k_1$  va a generar una configuración magnética que se aproxima a la solución correspondiente a un conservador de flujo aislado.

En la figura 4.8 se muestran los resultados obtenidos usando un perfil de  $\lambda$  lineal en función del flujo magnético. Por razones de practicidad hemos tomado equilibrios con  $f = 1$ , ya que se trata de mostrar la respuesta de la configuración ante cambios en el perfil de  $\lambda$ . Se seleccionaron perfiles lineales con  $\alpha$  entre 0 y  $-0.6$  ya que corresponden a situaciones observadas en resultados experimentales o cálculos numéricos [33, 53, 54].

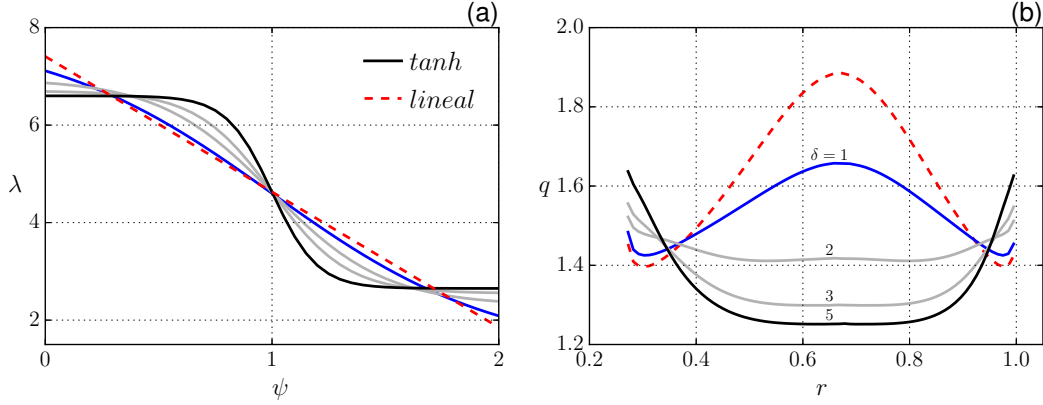
Estos perfiles de  $\lambda$  dan como resultado campos magnéticos que producen perfiles de  $q$  como los de la figura 4.8 (b). Tal como era de esperarse, una mayor cantidad de corriente relativa al campo magnético externo en la zona con  $\psi < 1$  conduce a un incremento en el valor de  $q$  por el aumento general de la relación entre  $B_\phi/B_{pol}$ .



**Figura 4.8:** En (a) se muestra el perfil de  $\lambda(\psi)$  lineal usando (4.23) para equilibrios con  $\psi_{max} = 2$  y  $\alpha$  entre 0 y  $-0.6$ . En (b) el resultado del cálculo del  $q$  de los equilibrios obtenidos para un cilindro con elongación  $e = 1$  y relación de campos externos  $f = 1$  (PCC).

Como hemos dicho anteriormente, en las simulaciones numéricas es común utilizar perfiles lineales (4.23) o tipo tanh (4.22). La ventaja de usar una dependencia tanh es que permite obtener equilibrios con perfiles de  $\lambda$  que presentan una mayor variación entre la zona de superficies abiertas y cerradas. Esto genera una mayor concentración de corriente en la zona de campos externos, incrementando el campo toroidal debido al aumento de la corriente  $I_z$ . Este comportamiento puede observarse en los resultados presentados en la figura 4.9, donde hemos graficado uno de los casos del equilibrio de la figura 4.8, con  $\alpha = -0.6$ , para comparar las diferencias entre ambos perfiles. El resultado arroja una diferencia notable y muy importante. No es trivial la elección de uno u otro perfil ya que como vemos en 4.9, una pequeña desviación (caso con  $\delta = 1$ ) de  $\lambda$  del modelo estrictamente lineal genera grandes modificaciones en las características del equilibrio, ver figura 4.9-b.

En los dispositivos de confinamiento tipo tokamak es de gran interés obtener valores de  $q$  elevados ( $q > 1$ ) para favorecer la estabilidad. Por otro lado, la forma del perfil también es de vital importancia para la estabilidad del plasma. Por ejemplo, en los tokamaks y tokamas esféricos el perfil de  $q$  es generalmente monótono creciente a partir del eje magnético, con valores cercanos a  $q = 3-4$  en la separatriz, y  $q \geq 1$  en el eje magnético. Según lo observado en las figuras 4.7, 4.8 y 4.9, para lograr equilibrios con perfiles de  $q$  con estas características, un modelo del tipo tanh es el más apropiado. Aún así, vemos que esto requerirá de gradientes pronunciados entre la corriente de la columna magnética central y la corriente confinada en las superficies magnéticas cerradas.



**Figura 4.9:** En (a) se muestran los perfiles de  $\lambda$  obtenidos usando el modelo  $\tanh$  con  $\delta$  entre 1 y 5, y se comparan con el modelo lineal (en línea punteada roja) con  $\alpha = -0.6$  de la figura 4.8. En (b) los perfiles de  $q$ . Todos los casos son para un cilindro de elongación  $e = 1$  y relación de campos externos  $f = 1$ , con un factor de amplificación de  $\mathcal{A} \approx 2$ .

## 4.8. Conclusión

Se presentó la ecuación de Grad-Shafranov, que permite calcular equilibrios MHD ideales axisimétricos y su resolución numérica por medio de un código sencillo que usa diferencias finitas en grillas cartesianas. Se mostraron las condiciones de borde utilizadas para obtener equilibrios representativos de configuraciones de interés, similares a experimentos como el CTX [50], SPHEX [10], PROTOSPHERA [11], y ST-PCC [12, 13].

Los resultados numéricos demostraron que es posible encontrar equilibrios con superficies magnéticas cerradas, confirmando la posibilidad de hallar configuraciones de interés para problemas de confinamiento magnético. Una vez comprobada la factibilidad del método, hemos mostrado estudios relacionados con el comportamiento resonante de las configuraciones con campos magnéticos externos cuando  $\lambda \rightarrow k_1$  en equilibrios totalmente relajados. Este comportamiento fue explicado matemáticamente, mostrando que la solución general puede ser expresada como el flujo de campo de vacío más una combinación lineal de las soluciones del problema aislado (4.20). La relación entre los campos de vacío y el equilibrio es también de mucha importancia.

Se observó el comportamiento lineal del término  $\langle \psi_v \chi_m \rangle \propto \mathcal{A}$  de la ecuación (4.20) como función de la relación de flujos  $f$  y se probó su influencia respecto a la cantidad de corriente necesaria ( $\mathbf{J} \cdot \mathbf{B}/B^2$ ) para lograr equilibrios con un determinado factor de amplificación, ver fig. 4.5 (b). Desde el punto de vista práctico, se pueden observar ventajas para equilibrios con  $f \rightarrow 1$  debido a que se logran configuraciones con menor energía magnética y mayor factor de amplificación, como también mejoras relacionadas con la estabilidad. Respecto a este último punto, veremos en el capítulo 5 que al igual que los autovalores  $k_m$ , correspondientes a equilibrios axisimétricos, existen otros autovalores correspondientes a configuraciones no axi-simétricas  $k_1^1$  que dependen únicamente de la geometría del conservador de flujo y son importantes para determinar la estabilidad de un equilibrio.

En relación al factor de seguridad  $q$ , hemos mostrado lo que ocurre con los equilibrios cuando  $\lambda$  se acerca al autovalor  $k_1$ . Se observó que los perfiles de  $q$  tienden a los valores

alcanzados en conservadores de flujo aislados, es decir, bajo valor de  $q$  y monótono decreciente desde el eje magnético. Esto se debe a que el factor de amplificación diverge y por lo tanto los campos externos dejan de ser relevantes. En cambio, cuando  $\lambda$  es pequeño ( $\lambda/k_1 \ll 1$ ),  $q$  tiende hacia valores relativamente elevados debido a que la columna magnética adquiere mayor importancia y esta posee una densidad de corriente  $J_z$  que contribuye al campo magnético toroidal.

Hemos probado que los resultados son muy diferentes si optamos por utilizar un perfil del tipo tanh o uno estrictamente lineal para la dependencia de  $\lambda$  con el flujo poloidal. Cuando se utiliza el modelo tanh con  $\delta$  elevado (ver ec. (4.22)), el perfil de  $q$  es más abrupto en la zona próxima a la separatriz. Por consiguiente, el perfil tiende a ser monótono creciente desde el eje magnético, contrariamente a lo que ocurre con el modelo lineal. El perfil monótono creciente es más cercano a los que se obtienen en los reactores del tipo tokamak.

La utilización de un modelo lineal o tanh dependerá finalmente de las condiciones de operación, de la configuración geométrica y de los campos externos. No podemos saber con certeza cual de los modelos representará mejor los resultados. Generalmente se suele apuntar a que la configuración de campos posea determinadas características para acomodar las variables e intentar conseguir los objetivos. Aún así, esto es uno de los desafíos más grandes relacionados con la temática de control. Veremos en los siguientes capítulos que en algunos casos la dinámica no lineal hace que el plasma se comporte de manera difícilmente predecible.



# Capítulo 5

## Inestabilidades MHD y relajación magnética en ST-PCC-CG

Analizamos la estabilidad MHD de los equilibrios descritos en el capítulo 4. Aplicamos el concepto de minimización de la energía en equilibrios perturbados al análisis de las inestabilidades de *tilt* y de corriente *kink*. Analizamos el efecto de la geometría, condiciones de borde y distribución de corriente sobre la estabilidad. Estudiamos los umbrales de estabilidad y el comportamiento no lineal de la relajación magnética mediante simulaciones MHD resistivas con aproximación  $\beta = 0$ .

### 5.1. Introducción

Estudiamos dos tipos de inestabilidades MHD ideales conocidas como *tilt* y *kink*, que podrían estar presentes en algunas configuraciones magnéticas toroidales. Para su comprensión, resulta fundamental utilizar el principio de minimización de la energía desarrollado en la sección 3.6, junto con las hipótesis presentadas en los trabajos Finn & Manheimer (1981)[45], Bondeson et. al. (1981)[46] y Tang & Boozer (2006)[12], que permiten comprender el origen de las inestabilidades MHD. Nos basamos también en los métodos analíticos desarrollados por Bussac (1975)[55], y ampliados por Wahlberg (2004)[56] para explicar el origen de las inestabilidades de corriente o *kink* interno que se desarrollan en un toroide, como así también en el criterio de Kruskal-Shafranov[23, 57] para determinar los límites de estabilidad del screw-pinch (o columna magnética). Para simplificar los cálculos numéricos y evitar la aparición de inestabilidades provenientes de gradientes de presión, utilizamos la aproximación  $\beta = 0$ .

Una de las motivaciones para estudiar este tipo de inestabilidades es que en trabajos numéricos previos[15, 58] relacionados con la formación de configuraciones toroidales mediante la relajación magnética, se observaron estructuras no-axisimétricas (modos toroidales con  $n > 0$ ) cuyo origen no se analiza adecuadamente. El análisis de las fluctuaciones observadas indica que pueden estar relacionados con la inestabilidad de *tilt*, es decir, que la configuración toroidal se inclina respecto a su eje de simetría, o con el *kink* tanto en la columna como en el toroide, o una combinación de estos modos. El análisis que se lleva a cabo en los trabajos citados no es suficiente ni el escenario es el apropiado (formación y sostenimiento) para realizar un estudio de estas

inestabilidades ya que la dinámica es altamente no lineal. Para el análisis utilizaron el umbral de estabilidad (elongación) de configuraciones magnéticas toroidales aisladas [45, 46], no aplicable al modelo original. En particular, el límite de estabilidad del tilt fue originalmente para conservadores de flujo cerrados, encontrándose que un equilibrio axisimétrico es estable si  $e \lesssim 1.67$  [45, 46]. Este resultado debe tomarse con cuidado al utilizarlo en problemas donde las condiciones de borde y la geometría difieren, ya que la variación del límite de estabilidad con la elongación para otros sistemas puede depender, además, de la configuración de campos externos y la corriente total. Dado que nos interesa estudiar configuraciones magnéticas similares al tokamak esférico (ST-PCC), como el proyecto PROTOSPHERA [11] o una combinación FCS y PCC (ST-PCC-CG), debemos considerar configuraciones magnéticas que pueden verse perjudicadas por las inestabilidades relacionadas con la elongación y la distribución de corriente, ya que se busca alcanzar estados con  $q$  elevado y monótono creciente desde el eje magnético.

Pese a que el incremento de la elongación resulta muy efectivo para elevar el  $q$ , se corre el riesgo de afectar la estabilidad del equilibrio debido a la aparición de modos equivalentes al tilt. Si bien se conocen con precisión los límites necesarios para garantizar la estabilidad en conservadores de flujo cerrados, no ocurre lo mismo cuando el equilibrio incluye campos magnéticos externos. Para esta situación, los límites de estabilidad al tilt no han sido estudiados con rigurosidad en función de los parámetros relevantes  $e$ ,  $f$  y  $\mathcal{A}$ .

Por otro lado, hemos visto (Cap. 4) que para lograr perfiles de  $q$  monótono crecientes se requieren perfiles de  $\lambda$  no uniformes. Esto puede conducir a la aparición de inestabilidades de corriente, más conocidas como kink (interno o externo). Como primer paso, comprobamos la validez de la condición de Kruskal-Shafranov para el screw-pinch (o columna central) en equilibrio con una configuración magnética toroidal. Dado que esta condición fue originalmente estudiada en el marco del modelo MHD ideal para un screw-pinch en vacío [57], el resultado de este análisis permite generalizar una condición de estabilidad válida para sistemas sencillos a otros relativamente más complejos. Como segundo paso, se puso a prueba la condición  $q > 1$  (alrededor del eje magnético) que garantiza la estabilidad del toroide (kink interno) [23, 55, 56]. Esta condición surge del análisis variacional de la energía ( $\delta W$ ) y aplica bien a toroides de elevada relación de aspecto (tokamaks). Sin embargo, es un tipo de inestabilidad considerada “débil” debido a que este modo recién se evidencia en el término de cuarto orden del desarrollo en serie de  $\delta W$  en la inversa de la relación de aspecto. Para este estudio, utilizamos perfiles de  $\lambda$  del tipo  $\tanh$  (uniformes en la región toroidal).

## 5.2. Inestabilidad de tilt para estados relajados

Consideremos la ecuación (3.10), con campos magnéticos nulos en la superficie del conservador de flujo. En el caso 2D es posible encontrar soluciones analíticas para un conjunto discreto de autovalores  $k_m$ , donde el mínimo de ellos da el auto-estado de mínima energía. Sin embargo, si consideramos la coordenada toroidal (problema 3D), dentro de las posibles soluciones se incluyen tanto equilibrios axisimétricos como no axisimétricos [59]. El caso no axisimétrico no posee soluciones analíticas, y para obtener los autovalores en función de los parámetros geométricos se debe recurrir a



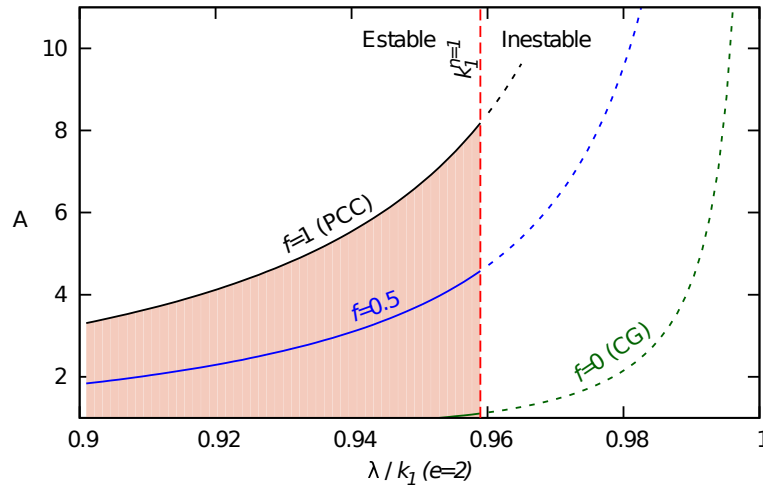
desarrollos en serie, cuya exactitud dependerá del número de términos considerados, o resoluciones numéricas “exactas”. Si consideramos que  $k_1$  es el autovalor más bajo de la familia de auto-estados axisimétricos ( $n = 0$ ), y que  $k_1^{n=1}$  es el autovalor más bajo de los autoestados no axisimétricos, resultará que  $k_1 < k_1^1$  [12] siempre y cuando  $e < 1.67$ . Para elongaciones superiores, la solución con dependencia toroidal  $n = 1$  resultará el estado de mínima energía. En ese caso, un plasma inicialmente en equilibrio axi-simétrico podrá presentar una inestabilidad de tilt [45, 46] que lo llevará hacia un estado no axisimétrico en el cual el eje magnético se inclinará respecto al eje de simetría axial. Notemos que es totalmente válido utilizar los autovalores de una configuración magnética aislada para comparar con el parámetro  $\lambda$  usado en problemas con campos magnéticos externos. Esto se debe a que  $\lambda$  y  $k_m^n$  son cantidades normalizadas ( $\propto W/H$ ) que dependen únicamente de la inversa de la escala del sistema.

Este resultado puede ser utilizado para estimar el umbral de elongación que lleva a la aparición del tilt en las configuraciones descritas en la sección 4.5, usando la ecuación (4.5). Como consideramos equilibrios con condiciones de borde no homogéneas, el sistema tiene una resonancia en  $k_1$  y  $\lambda$  debe permanecer debajo de este valor para tener una configuración magnética que llamaremos “regular”. Cuando  $e > 1.67$ ,  $k_1^1 < k_1$  y por lo tanto existe la posibilidad de que las soluciones con  $\lambda > k_1^1$  resulten inestables respecto al tilt. Notemos que  $k_1^1$  representa el umbral de la inestabilidad de tilt para configuraciones aisladas (sin campos externos), y por ello el criterio  $\lambda < k_1^1$ , que no incluye el efecto estabilizador de los campos externos fijos en los electrodos (line-tying), es demasiado restrictivo. Veremos más adelante que la inclusión del campo externo amplía la región de estabilidad.

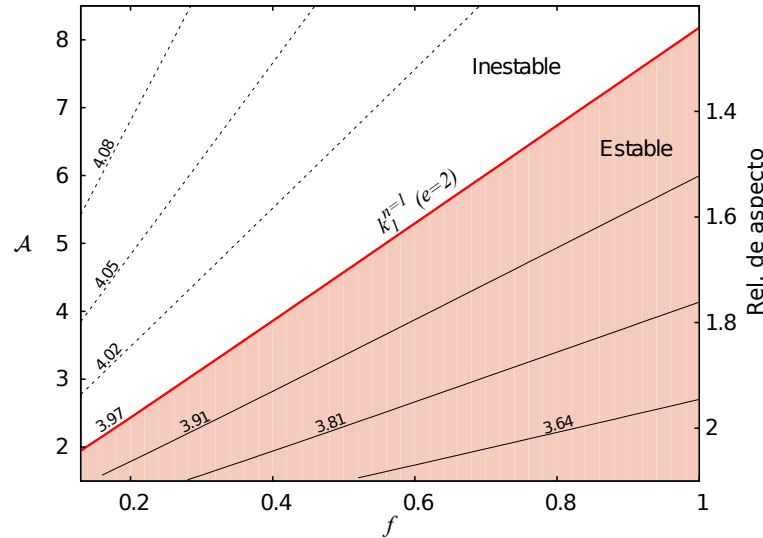
La situación anterior se muestra en la figura 5.1, donde se observa el factor de amplificación en función de  $\lambda$  para  $e = 2$ , y distintos valores de  $f$ . Las soluciones numéricas de la ecuación (4.5) recuperan el fenómeno de resonancia que predice la teoría en  $k_1(e = 2) = 4.14$  calculado con la ecuación (3.17). El umbral de estabilidad del tilt sin considerar el campo externo es  $k_1^1(e = 2) = 3.97$  [45, 46], y por encima de este valor las curvas se muestran en líneas a trazos. Notemos que incluso con  $e = 2$ , que es superior al límite encontrado para las configuraciones cerradas, pueden existir configuraciones estables para una combinación apropiada de  $\lambda$  y  $f$ , como se muestra en el área sombreada.

Tomando al par de variables  $(\lambda, f)$  como parámetros de operación, la región roja de la figura 5.1 puede ser considerada como la región de operación estable para  $e = 2$ . Esta región de estabilidad o de rango de operación, puede mostrarse también graficando el factor de amplificación en función de  $f$ , como se muestra en la figura 5.2. Una vez que se fija  $f$ , escogiendo la fracción de flujo que sale hacia el electrodo superior, el flujo magnético poloidal de la configuración cerrada se puede incrementar aumentando el valor de  $\lambda$ . El crecimiento de la corriente será proporcional a  $\mathcal{A}$ , y el máximo factor de amplificación posible para cada  $f$  puede deducirse directamente del mapa de estabilidad.

La primer conclusión que podemos sacar, es que el incremento de la fracción de flujos  $f$  en el electrodo superior (PCC) mejora la estabilidad frente al tilt:  $\lambda$  puede ser reducido mientras se incrementa  $f$  y con ello la configuración puede ser alejada del límite de estabilidad. Esto significa que son preferibles altos valores de  $f$ . Sin embargo, notemos que en el límite con  $f = 1$ , la helicidad solo puede ser inyectada usando el



**Figura 5.1:** Factor de amplificación en función de  $\lambda$  para  $e = 2$  y diferentes valores de  $f$ . Las soluciones con  $\lambda > k_1^{n=1}$  (línea a trazos) podrían ser inestables al tilt. La región de soluciones estables se indica con el área pintada en color rojo claro.

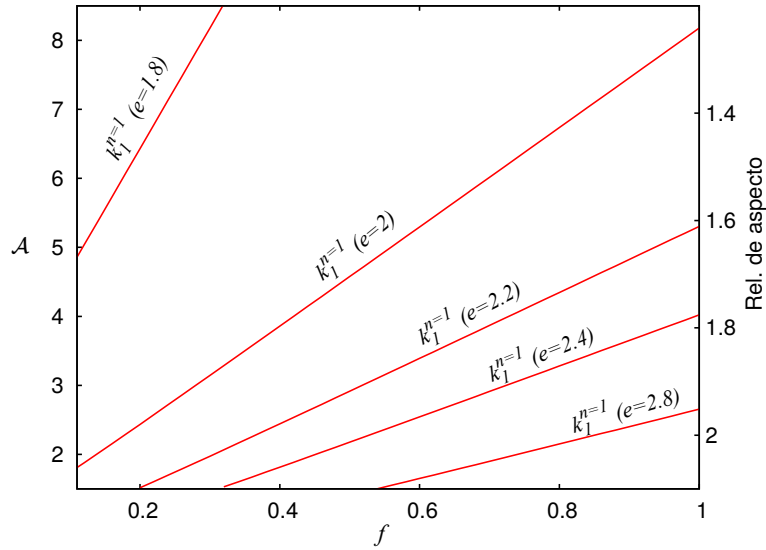


**Figura 5.2:** Mapas de estabilidad para equilibrios con  $e = 2$ . Los contornos de  $\lambda$  constante se muestran con líneas sólidas en las regiones de estabilidad y con líneas a trazos para los regiones inestables.

PCC. Por lo tanto, se pierde la posibilidad de controlar de manera independiente la tasa de inyección de helicidad y el campo toroidal externo.

En la figura 5.3, se muestran los límites de estabilidad para configuraciones con diferente elongación. Como en la figura 5.2, los equilibrios estables se encontrarán por debajo de la línea indicada en la figura en una región casi triangular. Una segunda conclusión importante que se obtiene a partir de estos mapas de estabilidad es que la región de equilibrio estable se reduce rápidamente con la elongación. En este sentido, configuraciones con  $e > 2.4$  son, en principio, de limitado interés práctico.

Otro parámetro importante de las configuraciones toroidales es la relación de aspecto (cociente entre los radios mayor y menor del toroide). Como ya se ha demostrado [12], la relación de aspecto escala aproximadamente en forma inversamente proporcional al factor de amplificación y tiene solo una débil dependencia respecto de los otros



**Figura 5.3:** Umbrales de estabilidad para configuraciones con diferente elongación. Como en la figura 5.2, los equilibrios estables se obtienen para valores de  $\mathcal{A}$  inferiores a este umbral.

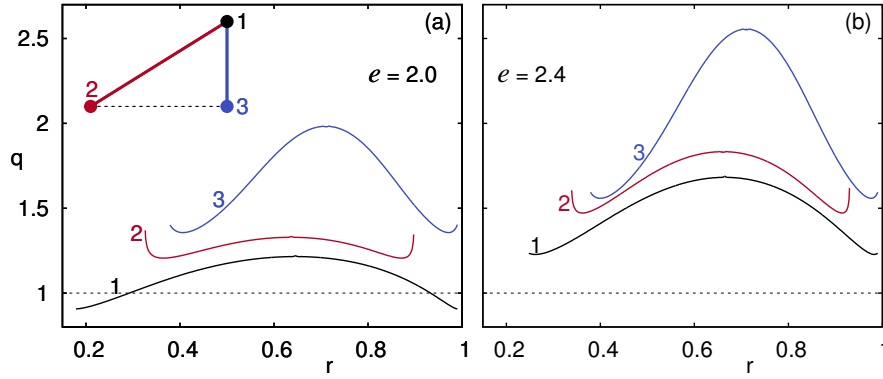
parámetros de la configuración. Aprovechando este hecho, la relación de aspecto ha sido incorporada en la parte derecha del eje  $y$  de los mapas de estabilidad de las figuras 5.2 y 5.3.

### 5.2.1. Factor de seguridad ( $q$ )

El factor de seguridad  $q$  es un parámetro fundamental que se relaciona directamente con las inestabilidades de corriente. En plasmas con  $\beta = 0$ , esta cantidad depende explícitamente de los valores locales de la corriente normalizada  $\lambda$ . Resulta además, como se mencionó en la sección 4.7, que los valores de  $e$  y  $f$  afectan el perfil de  $q$  porque cambian la configuración magnética.

Los perfiles de  $q$  obtenidos para las configuraciones correspondientes a tres puntos de la región de estabilidad de la figura 5.3 se muestran en la figura 5.4, para  $e = 2$  y  $e = 2.4$ . Cada perfil corresponde a uno de los puntos mostrados en el esquema de la esquina superior izquierda de la figura 5.4 (a). El primer punto (1), corresponde a un equilibrio con  $\lambda = k_1^1$  y  $f = 1$ , es decir, la configuración marginalmente estable que tiene el factor de amplificación  $\mathcal{A}$  más elevado. El segundo punto (2) a uno con  $\lambda = k_1^1$  y  $\mathcal{A} = 2$ . Y finalmente, el tercer punto (3) a uno con  $f = 1$  y  $\mathcal{A} = 2$ , que tiene el  $\lambda$  más bajo de estos tres casos. Notemos que (1) y (2) tienen el mismo  $\lambda$ , (1) y (3) el mismo  $f$ , y (2) y (3) el mismo  $\mathcal{A}$ .

Como es habitual en plasmas relajados, las configuraciones poseen perfiles de  $q$  con gradiente invertido en la zona central. Esto es lo que se conoce como “reversed magnetic shear” en la terminología habitual de los tokamaks. Para factores de amplificación bajos, la interacción con el flujo magnético externo produce un aumento del  $q$  cerca de la separatriz, estableciéndose una región con “shear” regular. Se observa también que un aumento de  $\lambda$  disminuye el  $q$  central (y viceversa). Esto concuerda con el comportamiento básico de los tokamaks: para un dado campo toroidal impuesto, el  $q$  central disminuye cuando la corriente toroidal se hace más picuda (es decir, cuando  $\lambda$  aumenta).



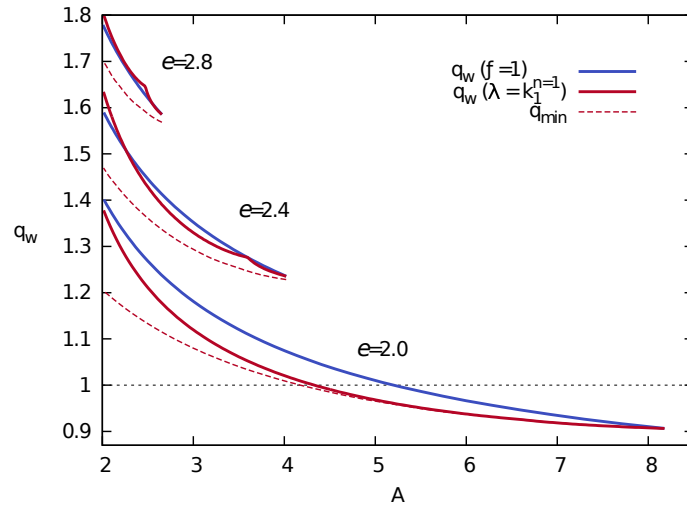
**Figura 5.4:** Perfiles del factor de seguridad en tres puntos de la región de estabilidad para elongación 2.0 (a) y 2.4 (b). Dado que las cantidades cambian poco dentro de esta región, los perfiles intermedios pueden ser cualitativamente inferidos.

Un objetivo importante es que las configuraciones propuestas, tanto el ST-PCC-CG [12] como el experimento PROTOSPHERA[11], posean equilibrios con perfiles de  $q$  similares al de los tokamaks dentro de conservadores de flujo simplemente conexos. Dado que los estados totalmente relajados tienden a tener un perfil de  $q$  plano o invertido, como se muestra en la figura 5.4, la fase de sostenimiento requerirá distribuciones de  $\lambda$  no uniformes (junto con la componente  $\mathbf{J}_\perp$  no nula para plasmas con  $\beta$  finito). A pesar de estas inevitables desviaciones, los estados relajados con un alto  $q_w$  ayudarán, en principio, a alcanzar el objetivo de configuraciones con  $q$  regular y una mejor estabilidad.

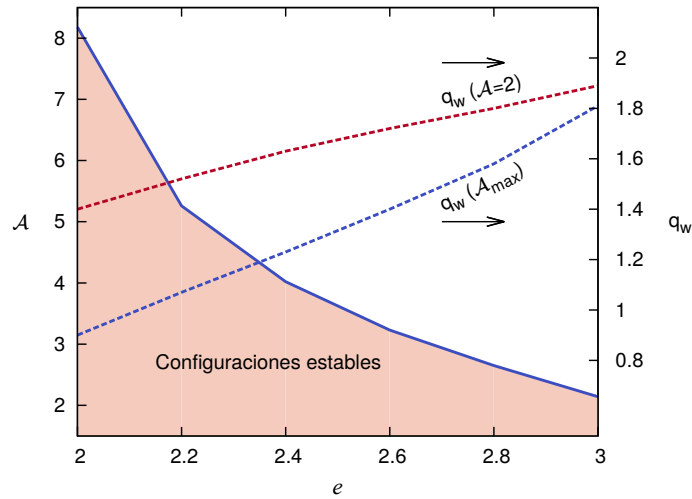
En la figura 5.5, se muestra  $q_w$  en función del factor de amplificación para diferentes elongaciones. Como hemos visto en la figura 5.4,  $q$  crece con la elongación y decrece con  $\mathcal{A}$ . Notemos que para cada  $\mathcal{A}$  pueden obtenerse varios valores de  $q_w$ , ya que diferentes combinaciones de  $\lambda$  y  $f$  son posibles en la región de estabilidad. Por esta razón, se graficaron dos curvas para cada elongación, una corresponde a  $\lambda = k_1^1$  (el umbral de estabilidad) y la otra a  $f = 1$  (el límite PCC). A pesar de esta libertad, resulta que  $q_w$  queda esencialmente determinado por  $e$  y  $\mathcal{A}$ , y tiene solo una débil dependencia de otros parámetros.

Como se ha observado en la figura 5.4,  $q_w$  crece más rápido que el mínimo  $q$  a medida que el factor de amplificación decrece. Esto produce una pequeña región de shear regular y un mínimo local en el perfil de  $q$ . Esto puede observarse en la figura 5.5 donde se muestra el mínimo  $q$  para configuraciones de estabilidad marginal con líneas a trazos. Este efecto solo es notable para  $\mathcal{A} < 4$ .

Finalmente, la figura 5.6 sintetiza la máxima amplificación  $\mathcal{A}$  y el rango de  $q_w$  (línea a trazos) que pueden ser obtenidos para diferentes elongaciones. El límite superior de  $q_w$  se colocó arbitrariamente en  $\mathcal{A} = 2$  (más flujo en regiones cerradas que el flujo impuesto de manera externa) mientras que el límite inferior corresponde al límite de estabilidad del tilt (sin la estabilización adicional debida a los campos externos fijos).



**Figura 5.5:** Valores del factor de seguridad  $q_w$  en la separatriz en función del factor de amplificación para diferentes elongaciones. Los valores corresponden a estados de estabilidad marginal con  $\lambda = k_1^{n=1}$  (en rojo) y al límite PCC  $f = 1$  (en azul). El mínimo  $q$  para configuraciones de estabilidad marginal se muestra en líneas a trazos.



**Figura 5.6:** Factor de amplificación en rangos estables para estados relajados en función de la elongación. También se muestra el valor de  $q$  en la separatriz para esos rangos.

## 5.3. Análisis dinámico de estabilidad

### 5.3.1. Descripción de las simulaciones con MHD resistiva

En esta sección utilizamos el código descrito en el apéndice A, en la aproximación de bajo  $\beta$ , para analizar la estabilidad de las configuraciones. Para reducir el modelo MHD resistivo al límite de  $\beta$  muy bajo se introducen las siguientes aproximaciones:

- MHD isotérmico. Se simplifica la ecuación de estado suponiendo que la presión es proporcional a la densidad (proceso isotérmico), de modo que  $p = c_s^2 \rho$ , donde  $c_s$  es la velocidad del sonido. De esta forma la ecuación de conservación de la energía queda desacoplada del sistema (A.2)-(A.3).
- Presión uniforme. En la aproximación de bajo  $\beta$ , la fuerza debida al gradiente de la presión es despreciable frente a la fuerza magnética. Se impone entonces que

$\rho$  sea uniforme durante toda la simulación, haciendo cero la primera componente de la función de flujos (A.56), correspondiente a la densidad.

- Bajo  $\beta$ . La descomposición localizada en autovectores de la matriz jacobiana utilizada para calcular (A.56), depende entre otras cosas, de las velocidades  $c_s$  y  $c_A$  (ver Sec. A.3). Para que el método numérico sea consistente con la aproximación de presión muy baja, es importante mantener una adecuada relación entre estas velocidades, ya que  $\beta = 2p_0/B_0^2 = 2(c_s/c_A)^2$ . Por ello, el valor de  $c_s$  (que es un parámetro del modelo MHD isotérmico) debe ser tal que  $c_s \ll c_A$ .

Con estas aproximaciones, el sistema de ecuaciones se reduce a,

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \nabla \cdot \Pi, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \eta \mathbf{J} = 0, \quad (5.3)$$

donde  $\Pi$  es el tensor de esfuerzos viscosos (ver sección 2.2.2). Estas ecuaciones constituyen el modelo cero- $\beta$ , que ha sido empleado en numerosos estudios numéricos referidos a la dinámica no-lineal de inestabilidades en spheromaks [15, 16, 34, 49, 60, 61].

El sistema (5.1)-(5.3) se resuelve en una grilla cartesiana tridimensional compuesta, por  $N_x \times N_y \times N_z = 100 \times 100 \times 50e$  nodos, donde  $e$  es la elongación. El análisis de los datos se simplifica definiendo una grilla en el plano poloidal, con  $N_r \times N_z = 50 \times 50e$ , en la que se almacenan los coeficientes de Fourier de la descomposición toroidal de  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{B}$ . De esta forma podemos analizar por separado las distintas componentes toroidales de la solución, distinguiendo la axisimétrica ( $n = 0$ ) y las no-axisimétricas ( $n = 1, 2, \dots$ ). Para reducir el tiempo de procesamiento, se realiza una paralelización del cálculo dividiendo el volumen en  $p$  partes iguales en la dirección  $\hat{z}$ , donde  $p$  es el número óptimo de partes (o procesadores) que hace mínimo el tiempo de procesamiento usando MPI (Message Passing Interface). Con este método se logró una multiplicación de la velocidad entre 4 y 5 veces usando 8 núcleos ( $p = 8$ ). Este número puede mejorarse si se logra incorporar una paralelización en todas las direcciones de grilla ( $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ ), y la eficiencia (o “speed-up”) se incrementa a mayor resolución de grilla.

### Escalas y parámetros adimensionales

El sistema (5.1)-(5.3) se encuentra expresado en unidades adimensionales. Las escalas de referencia son:  $a$  (el radio del cilindro),  $\psi_0$  (flujo magnético máximo que ingresa por la superficie inferior ( $z = -h/2$ )) (ver figuras 4.1, 4.2), y  $c_A$  (velocidad de Alfvén). Además,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{J}$  se normalizan con  $\sqrt{\mu_0}$ , de forma tal que  $\mu_0$  no aparece en las ecuaciones. Con estas escalas, el tiempo de Alfvén,  $\tau_A = a/c_A$  resulta igual a uno (el tiempo queda expresado en unidades de  $\tau_A$ ).

Los parámetros de la simulación son tres:  $c_s$ ,  $\eta$  y  $\nu$ . Para  $c_s$  se toma  $c_s \lesssim c_A/10$ , por consistencia con la aproximación de bajo  $\beta$ . El valor de  $\eta$  controla el número de Lundquist ( $S$ ) que establece la relación entre el tiempo de Alfvén y el tiempo resistivo definido como  $\tau_r = 1/(\eta k_1^2)$  (ver sección 2.3 y 3.5.3), donde aquí se toma

como parámetro de escala ( $\Lambda$ ), al primer autovalor  $k_1$  (ver (3.17)) para un cilindro de elongación y radio iguales a uno. En las simulaciones se trabajó principalmente con valores del número de Lundquist  $S \approx 4000$ , un valor óptimo por la resolución de grilla utilizada. Esto requiere que los parámetros de resistividad y elongación del cilindro, con  $a = 1$ , sean ajustados de tal manera que  $\eta$  sea  $1 \times 10^{-5}$  para un cilindro de elongación  $e = 1$ ,  $1.31 \times 10^{-5}$  para  $e = 1.5$ , y  $1.46 \times 10^{-5}$  para  $e = 2$ . Por último,  $\nu$  determina el valor del número de Prandtl magnético ( $P_m = \nu/\eta$ ), que se toma igual a uno en todos los estudios presentados en esta tesis.

Como se menciona en la Sec. A.4.8, existen además de los términos disipativos físicamente relevantes (viscosos y resistivos) de las ecuaciones MHD resistivas, los introducidos por la disipación numérica debido al error de discretización. Se utilizaron los resultados de trabajos previos [3] para emplear parámetros que garanticen la estabilidad numérica del código, y conseguir simultáneamente que los términos resistivos aún tengan peso sobre los resultados. Por ello, se opta por utilizar el mínimo valor de  $\eta$  para lograr simulaciones lo menos resistivas posible, esto significa que el valor máximo (seguro) del número de Lundquist es  $S \approx 4000$  para la resolución de grilla utilizada.

### Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno son fijas ( $\partial/\partial t = 0$ ) y corresponden a un conservador de flujo cilíndrico de radio  $a = 1$  y elongación  $e = h/a$  con campos magnéticos y de velocidad tales que en la superficie:

$$(\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}})|_{\partial\Omega} = cte \quad ; \quad (\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{n}})|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0 \quad (5.4)$$

La condición de densidad de corriente nula tangente a la superficie se debe, por un lado, a que buscamos anular el vector de Poynting ( $\propto \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ) en la superficie, y por otro, a que fijamos el flujo magnético. Este último motivo hace que  $(\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{n}})|_{\partial\Omega}$  deba ser cero para simular plasmas dentro de un conservador de flujo mediante las ecuaciones MHD (para más detalles ver sección 6.2, pag. 80).

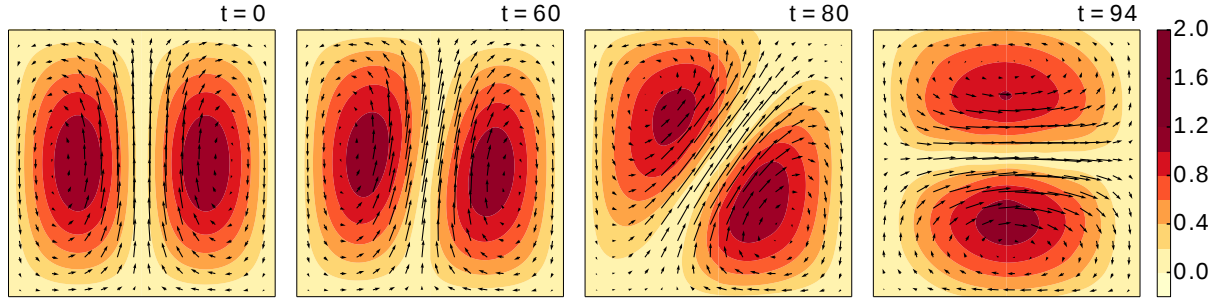
### 5.3.2. Inestabilidad de tilt

#### Configuraciones aisladas

Como se describió en la sección 5.2, cuando las condiciones de borde impuestas son homogéneas ( $(\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}})|_{\partial\Omega} = 0$ ), la ecuación (4.5) conduce a un problema de autovalores. El autovalor  $k_m^n$  es proporcional a la relación entre la energía magnética y la helicidad de la correspondiente autofunción. Por lo tanto, el plasma evolucionará hacia el estado con el menor de los autovalores. En el caso de dominios cilíndricos, el estado de menor energía es axisimétrico si  $e < 1.67$ , sin embargo, para elongaciones mayores el autovalor  $k_1^1$  se hace más pequeño que  $k_1$ , y por lo tanto, el estado de mínima energía presenta una dependencia con la dirección toroidal  $\phi$  ( $n = 1$ ) [45, 46].

Para comprobar que nuestro código es capaz de reproducir este comportamiento, resolvimos el sistema de ecuaciones MHD resistivas (2.4), (2.1) y (2.6) dentro de un cilindro de elongación  $e = 2$  con condiciones de borde nulas (normales a la superficie), y usando como condición inicial el estado axi-simétrico con  $\lambda = k_1$ . La expresión analítica





**Figura 5.7:** Componente poloidal (flechas) y toroidal (mapa de color) del campo magnético mostrando la evolución de la inestabilidad de tilt para  $e = 2$ .

para estos estados es la ecuación (3.14) usando las funciones de Bessel [62]. La evolución de la configuración magnética para  $e = 2$  se muestra en la figura 5.7. De acuerdo a los estudios previos, observamos que el sistema rápidamente se inestabiliza y evoluciona hacia una configuración completamente no axisimétrica (rotada  $90^\circ$ ). Finalmente, se comprueba la evolución completa de la configuración hacia el estado final de mínima energía no axisimétrico. Este resultado no se había observado en los trabajos previos [45, 46].

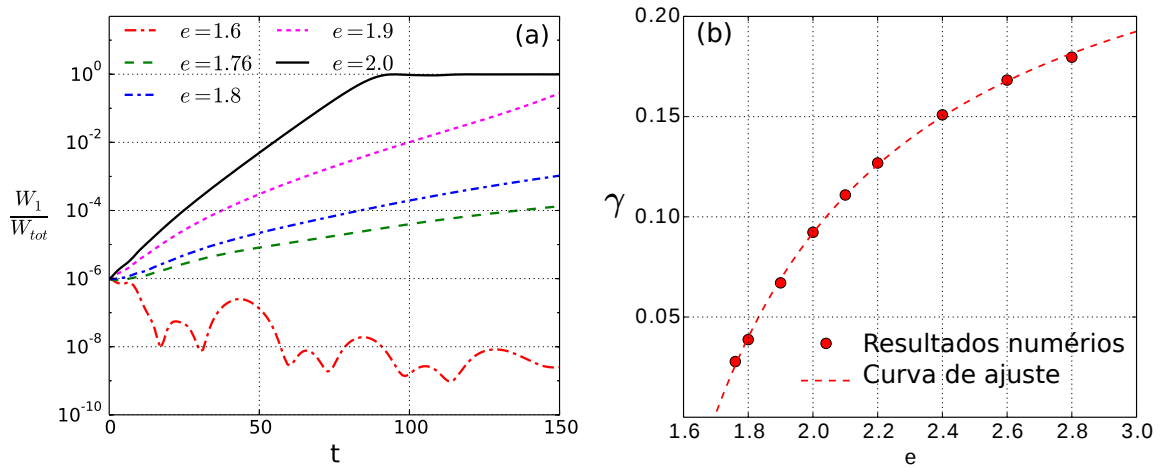
Para activar la inestabilidad aplicamos una pequeña perturbación  $n = 1$  al equilibrio inicial. Dado que el caso con  $e = 2$  se encuentra bien por encima del límite de estabilidad, el crecimiento exponencial del modo  $n = 1$  se observa luego de una pequeña evolución transitoria. Para eliminar esta transición, la estructura del modo  $n = 1$  durante la fase de crecimiento exponencial fue utilizada como perturbación en una nueva simulación numérica. El proceso fue repetido hasta que la transición inicial desaparece y la perturbación crece exponencialmente desde  $t = 0$ . En la práctica, se necesitó reiniciar las corridas entre tres y cinco veces para obtener el modo correcto del tilt. La energía inicial de la perturbación fue de  $10^{-6}$ , relativa a la energía de la configuración inicial. La evolución de la energía magnética del modo  $n = 1$  se muestra en la figura 5.8 (a). Podemos observar que en menos de 100 tiempos de Alfvén la energía magnética del sistema es completamente transferida al modo  $n = 1$ .

El mismo procedimiento fue utilizado para perturbar configuraciones con menor elongación, como se muestra en la figura 5.8 (a). Vemos que a medida que se reduce la elongación, la tasa de crecimiento del modo decrece, hasta que cuando los valores se encuentran debajo del umbral teórico de estabilidad 1.67, la perturbación inicial decae. Cerca del límite de estabilidad marginal, la estimación de la tasa de crecimiento basada en la evolución de nuestro modelo no lineal resulta ser imprecisa. Para mejorar la estimación del límite de estabilidad, las tasas de crecimiento de configuraciones inestables fueron ajustadas con una curva de regresión, y el valor extrapolado hasta  $\gamma = 0$ . En la figura 5.8 (b) se muestra este procedimiento. El límite de elongación estimado para obtener una configuración estable con este método resultó 1.69, valor que se encuentra suficientemente cerca del umbral teórico [45, 46].

### Efecto del flujo magnético externo

Cuando un flujo magnético externo atraviesa la superficie del cilindro, la ecuación (4.5) tiene solución para cualquier  $\lambda$ , excluyendo los autovalores  $k_m$  (ver sección





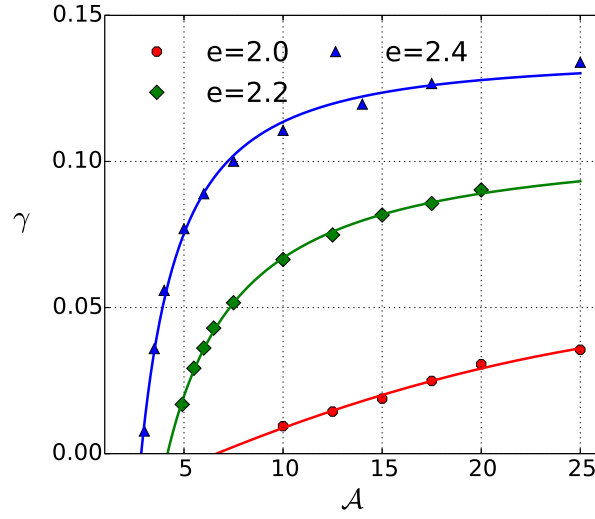
**Figura 5.8:** (a) Evolución de la energía magnética del modo  $n = 1$  ( $W_1$ ) relativa a la energía magnética total ( $W_{tot}$ ) para configuraciones aisladas con diferentes elongaciones. (b) Las tasas de crecimiento (puntos) fueron ajustadas con una curva de regresión, y extrapolada para estimar el umbral de estabilidad ( $\gamma = 0$ ).

4.5.3). Dado que sólo podemos calcular equilibrios 2D, solo conocemos los autovalores correspondientes a este caso ( $k_m$ ) (ver figura 5.1). Para el equilibrio solo hemos obtenido resultados de configuraciones magnéticas regulares, es decir, hemos restringido el estudio a configuraciones magnéticas con  $\lambda < k_1$ . Si además quisiéramos imponer restricciones en la selección de valores de  $\lambda$  máximos para prevenir el tilt,  $\lambda$  debería ser menor que  $k_1^1$ . Esta última restricción solo será importante para configuraciones con  $e > 1.67$  debido a que en ese caso  $k_1^1 < k_1$ . Este límite también puede consistir en imponer un valor máximo del factor de amplificación asociado a cada  $f$  (ver figura 5.2). Por otro lado, es importante notar que el análisis anterior está basado íntegramente en el valor de  $k_1^1$ , que está definido para configuraciones aisladas. Esto significa que este límite de estabilidad no toma en cuenta que las líneas magnéticas que atraviesan la superficie se encuentran fijas a los electrodos, lo que significa que se requiere una mayor energía para que el tilt se desarrolle.

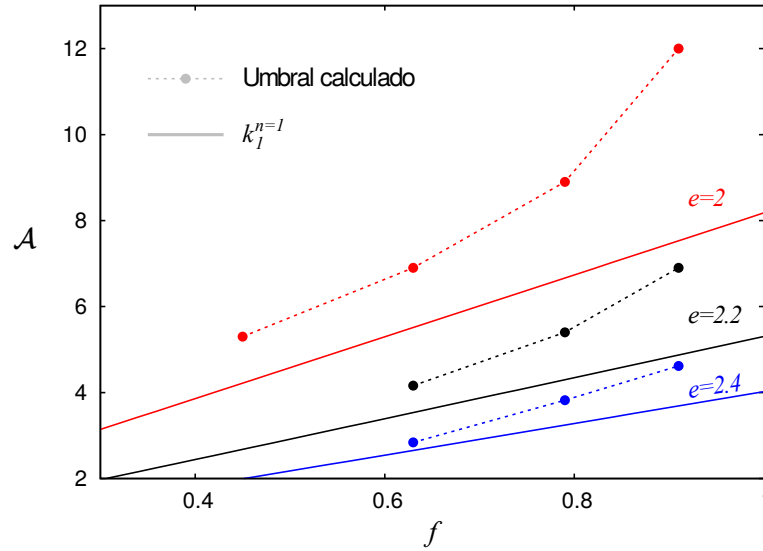
Para evaluar el efecto del flujo externo sobre la estabilidad realizamos una serie de simulaciones usando las configuraciones ST-PCC-CG descritas por la ecuación (4.5). Para este estudio fueron consideradas tres elongaciones,  $e = 2, 2.2$  y  $2.4$ . Debe quedar claro que una vez que el valor de  $f$  se encuentra fijado, el equilibrio se hará inestable si  $\lambda$  (o equivalentemente  $\mathcal{A}$ ) es suficientemente elevado. Es de esperar un límite de estabilidad mayor que  $k_1^1$  debido al efecto estabilizador de los campos fijos en los electrodos.

En la figura 5.9 se muestran las tasas de crecimiento obtenidas en tres series de corridas (una para cada  $e$ ) cuando  $f = 0.63$ . La abscisa elegida en el gráfico es  $\mathcal{A}$  (en lugar de  $\lambda$ ) por compatibilidad con los mapas de estabilidad de las figuras 5.2 y 5.3. Cada punto fue obtenido siguiendo el mismo procedimiento que en la figura 5.8 (b) (ver explicación en la sección 5.3.2). Nuevamente, la extrapolación de las tasas de crecimiento calculadas para equilibrios inestables permitió estimar el límite de estabilidad en función de la amplificación ( $\mathcal{A}$ ).

Los límites de estabilidad obtenidos para distintos valores de  $f$  están graficados en la figura 5.10 (puntos conectados con líneas a trazos). Los tres puntos en la figura



**Figura 5.9:** Tasas de crecimiento obtenidas para tres serie de corridas con elongaciones 2, 2.2 y 2.4. La relación de flujos de la columna magnética es  $f = 0.63$  en los tres casos. Cada punto corresponde a una simulación.



**Figura 5.10:** Límites de estabilidad calculados usando el método de los autovalores (líneas sólidas), y los estimados incluyendo el efecto de los campos fijos en los electrodos (puntos y líneas a trazos). Notar que cada punto corresponde a una familia de simulaciones.

5.9 donde la tasa de crecimiento es nula, dan los valores para  $f = 0.63$ . Notemos que cada punto del gráfico corresponde a una familia de corridas y que las líneas sólidas indican los límites de estabilidad deducidos de la condición  $\lambda = k_1^1$  (como en la figura 5.3). Como era de esperar, las simulaciones confirman una mejora de la estabilidad debido al efecto de los campos externos. Además, se observa una mejora adicional en la estabilidad al distribuir el flujo magnético saliente hacia la superficie superior del conservador de flujos ( $f \rightarrow 1$ ). Este comportamiento se debe al efecto estabilizador que se logra al fijar los campos magnéticos externos en la superficie del conservador de flujo, y significa que se necesita una energía mayor para “doblar” las líneas de campo. Este efecto produce una mejora adicional en la estabilidad que resulta importante para configuraciones con  $e = 2$  y  $f$  entre  $0.7 - 0.9$ , y pierde importancia conforme la

elongación se incrementa y/o disminuye  $f$ .

## 5.4. Inestabilidad de Kink

En esta sección estudiamos la evolución de la inestabilidad de corriente (o kink) para una de las configuraciones presentadas en el capítulo 4. Las fluctuaciones provocadas por estas inestabilidades permiten, por efecto dínamo, la distribución de la energía, la transformación de flujos, el sostenimiento de la corriente toroidal, etc. Aún si consideramos que la configuración pueda sostenerse por otros métodos (ondas o haces), interesa operar con altos valores de corriente en la columna central para incrementar el valor del factor de seguridad ( $q$ ) en el borde del plasma, o separatriz de la configuración toroidal. Estos requisitos muestran la necesidad de estudiar las condiciones requeridas para lograr equilibrios estables.

El análisis de la inestabilidad de kink se realiza considerando el trabajo de Ryutov et. al. [57], relacionado con la inestabilidad de kink externo en un screw-pinch con interfaz plasma-vacío y el de Wahlberg [56] respecto al kink interno para un toroide de sección circular. Estos trabajos se realizaron usando las ecuaciones MHD linealizadas, o bien, mediante el principio de la energía (ver sec. 3.6) con la aproximación  $\epsilon \ll 1$  (alta relación de aspecto) [23] desarrollada por Bussac et. al. [55], siendo  $\epsilon$  la inversa de la relación de aspecto (ver ec. (4.17)).

Del principio de la energía, el desarrollo de  $\delta W$  en potencias de  $\epsilon$  conduce a una expresión de la forma:

$$\delta W \approx \delta W_0 + \delta W_2 + \delta W_4 + \dots \quad (5.5)$$

donde  $\delta W_n \propto \epsilon^n \delta W_0$  [23]. Para determinar si un equilibrio es inestable, se buscan los modos que minimizan los términos  $\delta W_n$ . Estos modos serán condición necesaria pero no suficiente para determinar la estabilidad de la configuración magnética. Esto se debe principalmente a que la aproximación  $\epsilon \ll 1$  se satisface en un screw-pinch con interfaz plasma-vacío o en configuraciones toroidales de alta relación de aspecto y sección circular, pero pueden no satisfacerse en un ST-PCC ya que su relación de aspecto es menor que la de los tokamaks convencionales. Por lo tanto, los límites de estabilidad obtenidos a través de un desarrollo como el (5.5) pueden perder exactitud.

Del los resultados obtenidos utilizando (5.5), pueden distinguirse dos tipos de modos relacionados con la inestabilidad de corriente, estos pueden clasificarse en:

### ■ Kink interno

Esta inestabilidad de corriente se presenta en regiones internas del plasma, donde  $q < 1$ . Si bien es condición necesaria tener un perfil de  $q$  que en algunas regiones sea menor a 1, principalmente en el eje magnético, este modo es uno de los más débiles ya que la inestabilidad proviene principalmente del peso relativo del término  $\delta W_4$  respecto de los términos  $\delta W_0$  y  $\delta W_2$ . Con desplazamientos rígidos ( $\xi$ ) con una dependencia toroidal  $n = 1$ , localizados en la región con  $q < 1$ , se puede lograr el mínimo de  $\delta W_2$ . Sin embargo, el crecimiento de la inestabilidad dependerá principalmente de la densidad de corriente en esta región, que al aumentar produce la expansión de la región con  $q < 1$  y reduce el valor de

$q$  en el eje magnético (bajo  $q$ ). Esta situación puede contribuir a que  $\delta W_4$  sea suficientemente negativo como para lograr que  $\delta W < 0$ .

En plasmas con  $\beta \neq 0$  los gradientes de presión pueden contribuir a la inestabilidad de kink, por lo que pueden no ser necesarias zonas demasiado grandes y pronunciadas con  $q < 1$  para que aparezca la inestabilidad.

#### ■ Kink externo

Esta inestabilidad produce el desplazamiento de la superficie del plasma, que puede interactuar con la pared de la cámara de descarga. Al analizar los términos  $\delta W_n$ , el origen de este modo proviene de considerar un desplazamiento  $\xi$  localizado en la superficie o separatriz del plasma. Del desarrollo se obtiene que el desplazamiento más importante será aquel con modo  $n = 1$ . La estabilidad del kink externo se puede determinar a través del “criterio de Kruskal-Shafranov”, que indica que un equilibrio es estable cuando la corriente es inferior al valor límite  $I_{KS}$ . Por ejemplo, para un screw-pinch en vacío (paredes conductoras en  $r \rightarrow \infty$ ) de radio  $r_e$  y longitud  $h$ ,

$$I_{KS} = \frac{4\pi^2 r_e^2 B_z(r_e)}{h\mu_0} \quad (5.6)$$

Esta condición es válida para un screw-pinch, y de manera aproximada para una configuración magnética toroidal en el vacío. Esto quiere decir que para que un equilibrio sea estable al kink externo, es condición necesaria que en la superficie del plasma  $q > 1$ .

Este límite de estabilidad se aplica estrictamente a configuraciones con paredes conductoras en el infinito. En el trabajo de Ryutov, et. al.[57] se resuelve el problema para un screw-pinch interactuando con el vacío, con condiciones de borde finitas y una pared conductora a una distancia  $b - r_e$  de la superficie del plasma. El resultado muestra que para estabilidad, la corriente debe ser:

$$I_z < \frac{I_{KS}}{1 - (r_e/b)^2} \quad (5.7)$$

donde  $b$  es el radio de la pared conductora. Esto quiere decir que si el límite de estabilidad puede verse afectado debido a la distancia de la pared conductora (o conservador de flujo), también podría hacerlo la presencia de la corriente toroidal que comprime las líneas magnéticas del screw-pinch. Este problema puede extenderse de manera aproximada a configuraciones magnéticas toroidales de elevada relación de aspecto.

### 5.4.1. Análisis de estabilidad. Equilibrios MHD

Estudiamos la inestabilidad de kink usando configuraciones magnéticas ST-PCC similares a las presentadas en el capítulo 4, con  $f = 1$ ,  $r_e = 0.5$ ,  $e = 1$  y elevada corriente ( $J_{\parallel}/B$ ) usando perfiles de  $\lambda$  tipo tanh (ver sección 4.6). Recordemos que este tipo de perfil de  $\lambda$  puede no representar correctamente a todos los experimentos de sostenimiento por métodos de inyección de helicidad. Los perfiles de  $\lambda$  dependerán de

una gran cantidad de factores: estabilidad, resistividad, métodos adicionales de control, etc.. Sin embargo, como uno de los objetivos es generar equilibrios con características similares a las configuraciones magnéticas toroidales logradas en los tokamaks esféricos, es importante obtener equilibrios con elevada corriente en la columna magnética para poder incrementar la componente toroidal del campo magnético. El modelo con perfil de  $\lambda$  dado por (4.22) con  $\delta = 4$  es una buena elección para este propósito.

### Perfil de $q$ y $\lambda$

Los equilibrios MHD de configuraciones ST-PCC presentan dos regiones fácilmente distinguibles divididas entre sí por la separatriz ( $\psi/\psi_0 = 1$ ) cuando  $\mathcal{A} > 1$ . Estas son la región toroidal y la columna magnética (o “screw-pinch”) (ver fig. 4.2). Hacemos esta distinción para poder definir un perfil de  $q$  en cada región, siendo  $q_t$  el relacionado con la región toroidal y  $q_c$  el de la columna magnética.

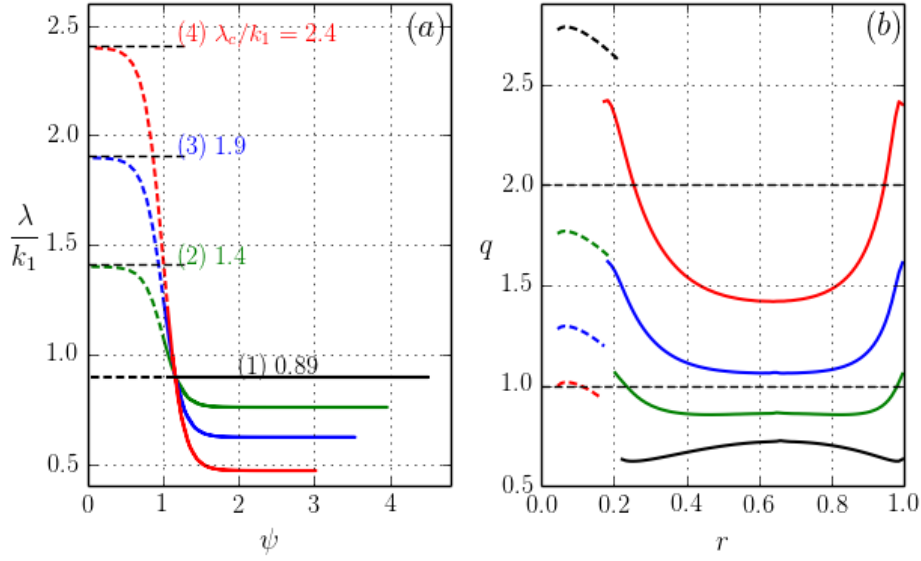
El perfil  $q_t$  se define analíticamente mediante la ecuación (4.24), que surge de la relación entre la cantidad de vueltas toroidales respecto a las poloidales que realiza una línea magnética. Por otro lado, el cálculo de  $q_c$  debe ser definido de manera diferente en la columna magnética porque no contamos con una topología toroidal. Sin embargo, podemos utilizar una metodología análoga suponiendo a la columna como un toroide abierto de longitud  $2\pi r_a = h$ , donde la componente  $B_z$  hace las veces de campo toroidal y  $B_\phi$  de poloidal. De esta interpretación el valor  $q_c$  se puede representar analíticamente como:

$$q_c(r) = \frac{1}{h} \oint \frac{B_z}{B_\phi} dl = \frac{1}{h} \int_0^{2\pi} \frac{B_z}{B_\phi} r d\phi = \frac{2\pi r}{h} \frac{B_z}{B_\phi} \quad (5.8)$$

donde  $h$  es la longitud del cilindro. Esta ecuación está pensada para cilindros de longitud  $h$  donde el campo tenga solo componentes  $z$  y  $\phi$ . En nuestras configuraciones las líneas magnéticas de la columna pueden tener además una componente en  $r$ . Por ello, como el cálculo analítico puede diferir del resultado real, el método utilizado en esta tesis consistió en integrar las trayectorias de las líneas magnéticas y calcular los valores de  $q_c$  como  $2\pi/\Delta\phi$ , donde  $\Delta\phi$  es el desplazamiento toroidal que realiza la línea magnética desde  $z = -h/2$  hasta  $h/2$  para un  $r \leq r_e$ .

El perfil de  $q$  depende de los valores que adopte  $\lambda$  en el volumen al resolver la ecuación (4.3) con  $\beta = 0$ . Podemos ver algunos ejemplos de los perfiles de  $\lambda$  utilizados en la figura 5.11 (a), y en (b) el cálculo del  $q$  correspondiente a las curvas  $\lambda(\psi)$ . Se muestra un caso con  $\lambda$  uniforme y  $\mathcal{A} = 4.5$ , y otros tres ejemplos con perfiles del tipo  $\tanh$ . En las figuras, los perfiles de  $\lambda$  y  $q$  se presentan como curvas en función de  $\psi$  y  $r$  respectivamente, donde se distinguen tramos con línea a trazos para indicar la región de la columna y en línea sólida para la toroidal. En la figura (a), los ejemplos corresponden a equilibrios con factor de amplificación que van desde  $\mathcal{A} = 3$  a 4.5.

Notemos que para conservar aproximadamente la amplificación de flujo es necesario que al incrementar  $\lambda_c$  disminuya en menor proporción  $\lambda_t$  ( $\lambda$  mínimo en la región toroidal). A pesar de que el factor de amplificación depende directamente de los valores de  $\lambda$  en ambas regiones, es importante notar que el parámetro que mayor peso tiene sobre el flujo poloidal es  $\lambda_t$ . Esto se debe a que es el parámetro que mayor influencia tiene sobre la cantidad de corriente toroidal en el equilibrio; cuanto más grande  $\lambda_t$  mayor será  $\mathcal{A}$ , y viceversa. Por lo tanto, por conveniencia, evitamos usar  $(\lambda_c, \lambda_t)$  como parámetros



**Figura 5.11:** (a) Perfiles de  $\lambda$  en función del flujo poloidal  $\psi$ , y (b) perfiles de  $q$  en función de  $r$ , calculados a partir de los resultados obtenidos de la ecuación de equilibrio (4.3) con  $\beta = 0$ .

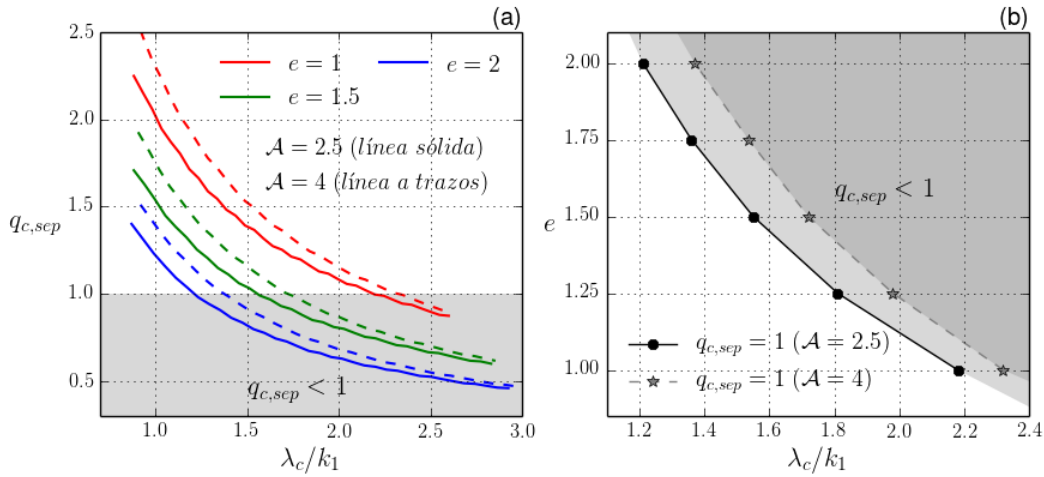
descriptivos del equilibrio y reemplazamos  $\lambda_t$  por el factor de amplificación ( $\mathcal{A}$ ), ya que es un parámetro más relevante. Entonces, serán el par de parámetros ( $\lambda_c, \mathcal{A}$ ) los que definen el tipo de equilibrio, habiendo fijado la inversa del “ancho” en  $\delta = 4$  para el perfil de  $\lambda$  descrito por la ecuación (4.22).

Vemos en la figura 5.11 que al incrementar  $\lambda_c$ ,  $q_c$  disminuye de manera considerable hasta alcanzar valores por debajo de la unidad. Los valores de  $q_c$  no solo dependen de  $\lambda_c$ , sino que también son función de  $\mathcal{A}$  (o  $\lambda_t$ ) y de la geometría de la configuración (por ejemplo: elongación). A pesar de que no haremos un análisis de estabilidad en configuraciones con  $e > 1$ , resulta de interés mostrar el comportamiento de  $q_{c,sep}$  ( $q_c$  evaluado en la separatriz) al modificar la elongación y amplificación de flujo.

### Comportamiento con la amplificación ( $\mathcal{A}$ ) y la elongación ( $e$ )

En la figura 5.12 (a) mostramos los valores de  $q_c$  calculados en la separatriz ( $q_{c,sep}$ ) como función del parámetro  $\lambda_c$  para amplificación  $\mathcal{A} = 2.5$  y 4, y conservadores de flujo con elongación entre  $e = 1$  y 2. Manteniendo fijo  $\mathcal{A}$ , al incrementar  $\lambda_c$  los valores de  $q_c$  disminuyen debido al incremento relativo de la componente  $J_z$  de la corriente. Cualitativamente esto significa que la “helicidad” de las líneas magnéticas en la columna aumenta, incrementando el desplazamiento toroidal ( $\phi$ ) respecto al longitudinal (en dirección  $z$ ). Por otro lado, manteniendo fijos  $\lambda_c$  y  $\mathcal{A}$ , el incremento en la elongación resulta en la disminución de  $q_c$ . Esto se debe al incremento del desplazamiento longitudinal de la línea magnética en  $z$  que crece con  $h$  (ver ec.(5.8)). En la figura 5.12 (b) se indican los puntos de intersección con la recta  $q_{c,sep} = 1$  de la figura 5.12 (a). Adicionalmente se le han agregado algunos puntos más que corresponden a elongaciones  $e = 1.25$  y 1.75 no mostrados en (a).

Como se muestra en las figuras 5.12, en la región sombreada se ubican los equilibrios con valores  $q_{c,sep} < 1$ . Esto significa que los equilibrios pueden ser inestables al kink de acuerdo al análisis de la estabilidad para un screw-pinch en vacío (ver sec. 5.4). En la



**Figura 5.12:** (a) Valores de  $q_{c,sep}$  ( $q_c$  mínimo) como función de  $\lambda_c/k_1$  para factores de amplificación  $\mathcal{A} = 2.5$  y 4. (b) Puntos en el plano  $(e, \lambda_c/k_1)$  donde  $q_{c,sep} = 1$  para los equilibrios con elongación entre 1 y 2 y amplificación 2.5 y 4. La región en gris indica la zona donde los equilibrios tienen  $q_{c,sep} < 1$ .

sección 5.4.2, comprobaremos la validez de este argumento a través de la resolución de las ecuaciones MHD resistivas.

### Mapa de $q$

En la figura 5.13 podemos ver un mapa general de los valores de  $q_{c,sep}$  y  $q_t$  que tendrán los equilibrios en cilindros con elongación  $e = 1$ . Se pueden obtener equilibrios donde los perfiles de  $q_t$  se encuentren entre valores similares a los alcanzados en FCS ( $q_t < 1$ ) o tokamaks ( $q_t > 1$ ), ver figura 5.11. Además, la región sombreada (amarillo) está limitada por líneas punteadas que indican que  $q_t = 1$  en el eje magnético ( $q_{t,a}$ ) o en la separatriz ( $q_{t,sep}$ ).

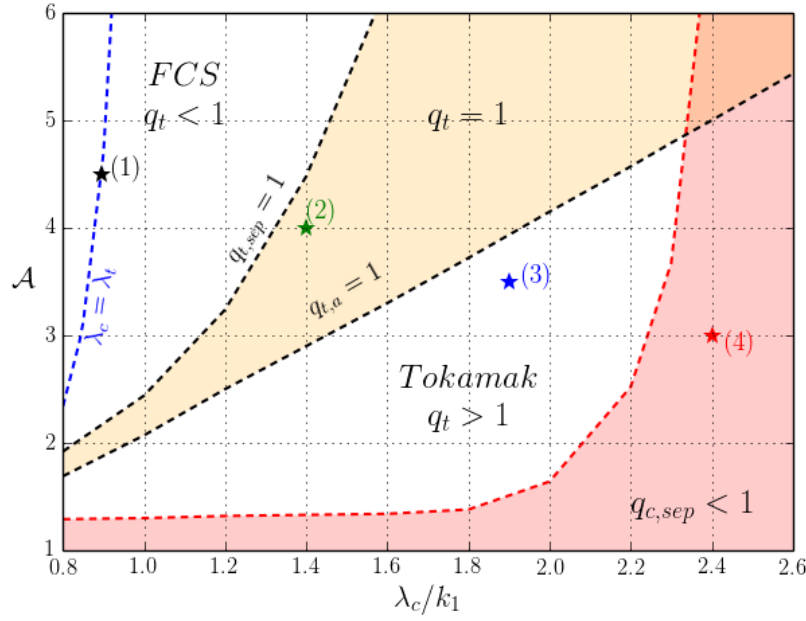
La utilización de un perfil de  $\lambda$  del tipo tanh permite incrementar los valores de  $q$  de la región toroidal, con lo que podría evitarse la aparición del kink en esta zona. Sin embargo, los estudios analíticos relacionados con la inestabilidad del screw-pinch, predicen que el incremento de la corriente en la columna puede producir el desarrollo de modos con  $n = 1$  capaces de destruir la configuración magnética. Las figuras 5.11 y 5.13 muestran los escenarios que encontraremos al modificar los parámetros  $\lambda_c$  y  $\mathcal{A}$  para un equilibrio con elongación  $e = 1$ , y la figura 5.12 el comportamiento de  $q_{c,sep}$  como función de la elongación y amplificación.

Para analizar la estabilidad de los equilibrios y validar algunas de las hipótesis planteadas en la sección 5.4 respecto de la inestabilidad de kink, a continuación se presentan simulaciones MHD resistivas de equilibrios perturbados con métodos similares a los implementados para el estudio de la inestabilidad de tilt (ver sec. 5.3.2).

#### 5.4.2. Análisis de estabilidad. MHD resistiva

Considerando las hipótesis relacionadas con la inestabilidad de kink de la sección 5.4 y los equilibrios presentados en la sección anterior (sec. 5.4.1), estudiamos la evolución





**Figura 5.13:** Mapa de valores  $q_c$  y  $q_t$  en un plano de coordenadas  $(\lambda_c/k_1, \mathcal{A})$  para un cilindro de elongación  $e = 1$ . En las regiones sombreadas se indica la presencia de superficies racionales  $q_{c;t} = 1$ , o las zonas con  $q_t(r) < 1$  o  $> 1$ . Se muestra además los puntos de los cuatro equilibrios de la figura 5.11.

en el tiempo de equilibrios perturbados usando las ecuaciones MHD resistivas descriptas en la sección 5.3.1.

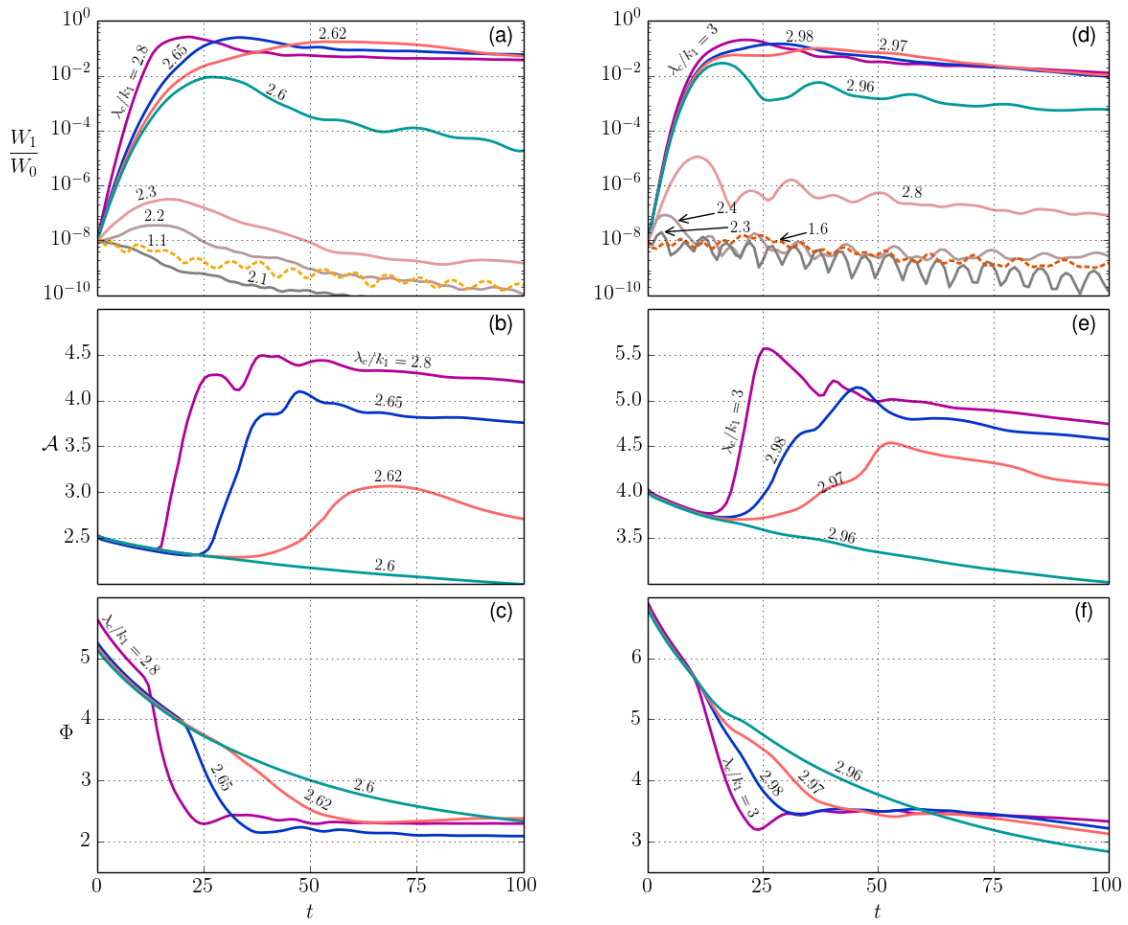
En la figura 5.14 se muestran la evolución temporal de la energía magnética relativa del modo  $n = 1$  ( $W_1/W_0$ ), el factor de amplificación y el flujo toroidal de equilibrios inicialmente perturbados con una dependencia toroidal  $n = 1$  y energía magnética relativa del orden de  $W_1/W_0 = 10^{-8}$ . Se seleccionaron algunos equilibrios con valores de  $\lambda_c$  y amplificación inicial  $\mathcal{A} = 2.5$  (a-c) y  $\mathcal{A} = 4$  (d-f).

En las simulaciones con amplificación de flujo inicial  $\mathcal{A} = 2.5$  (ver fig. 5.14 (a)), vemos que el límite de estabilidad se ubica en  $\lambda_c/k_1 \approx 2.2$  debido a que para este valor de  $\lambda_c$  la energía del modo apenas crece en los primeros instantes de tiempo. Esto se encuentra de acuerdo con la condición de KS expresada en términos del factor de seguridad  $q_{c,sep} = 1$  (ver fig. 5.13). La distorsión producida por la inestabilidad se observa en la figura 5.15, que muestra a la columna magnética central con la estructura de un kink con  $n = 1$ .

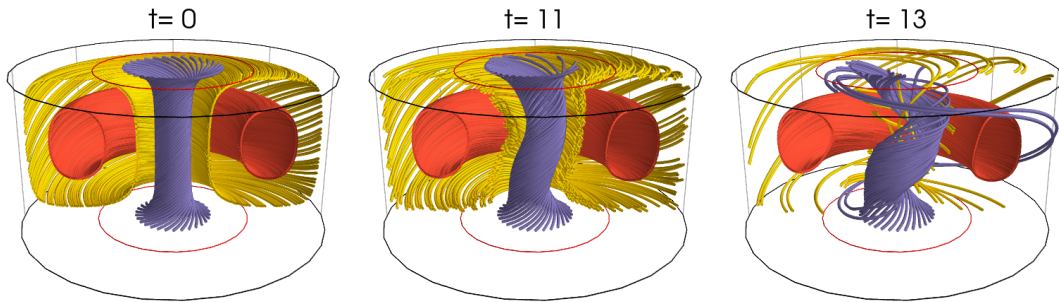
Las simulaciones cercanas al límite de estabilidad para amplificación  $\mathcal{A} = 4$  (fig. 5.14 (d)) también se encuentran en buen acuerdo con el límite de KS. En estos casos se ve un crecimiento inicial del modo  $n = 1$  cuando  $\lambda_c = 2.4$ , siendo  $\lambda_c = 2.3$  el límite de estabilidad marginal. Para valores de  $\lambda_c$  entre 2.3 y 2.96, la fase de saturación no lineal se alcanza rápidamente y el modo luego decae con rebotes en su amplitud. Este comportamiento se debe al efecto estabilizador del toroide que se encuentra en equilibrio con la columna magnética, y presenta una significativa cantidad de flujo magnético en los casos con amplificación de flujo  $\mathcal{A} = 4$ .

Cuando  $\lambda_c$  excede el límite de estabilidad, los modos inestables crecen, saturan y finalmente decaen porque no existe un forzado externo en estas simulaciones. Es importante notar que la presencia de las fluctuaciones producidas por la inestabilidad no





**Figura 5.14:** Energía magnética relativa del modo  $n = 1$  ( $W_{n=1}/W_{n=0}$ ), factor de amplificación y flujo toroidal para equilibrios perturbados con amplificación inicial  $\mathcal{A} = 2.5$  (a-c) y 4 (d-f).



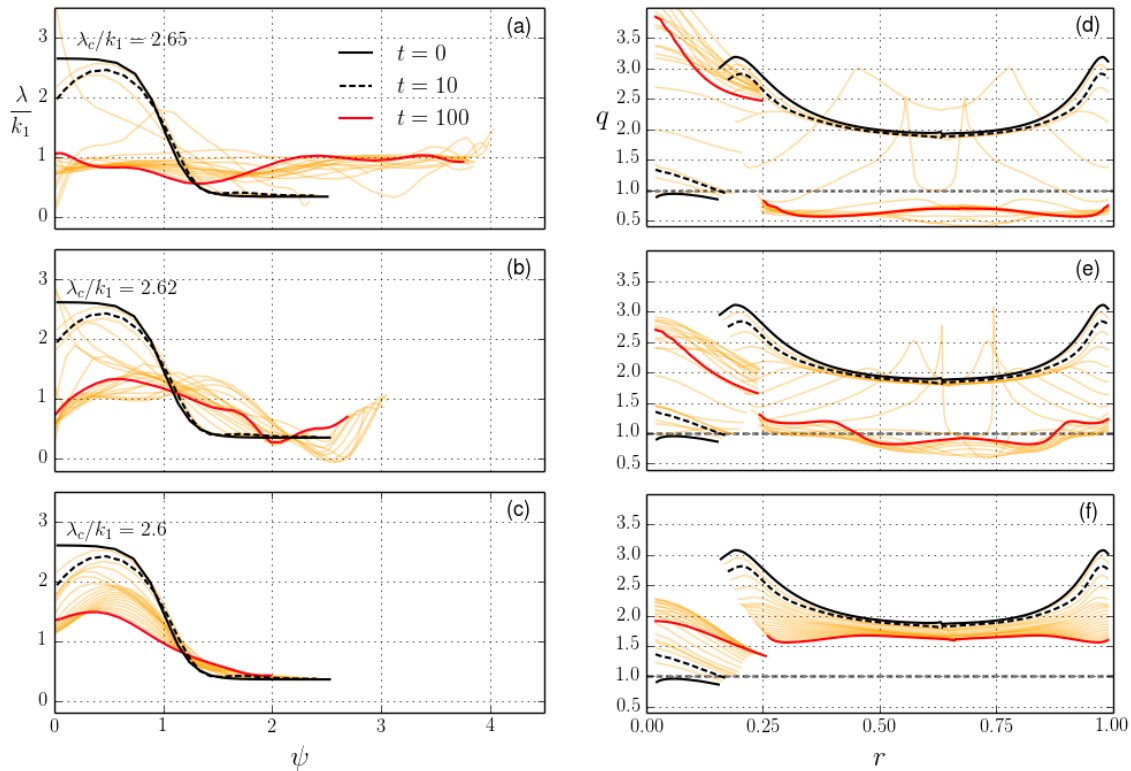
**Figura 5.15:** Evolución en el tiempo de la configuración de campos magnéticos para el caso con  $\lambda_c/k_1 = 2.8$  y  $\mathcal{A} = 2.5$ . Se distingue la distorsión de la columna central y la destrucción de superficies magnéticas cerradas en  $t = 13$ .

implica que haya relajación. Para observar relajación en el plasma,  $\lambda_c$  debe incrementarse bien por encima del límite de estabilidad. Este caso puede observarse en la figura 5.14 (a) y (d), que muestran que un pequeño cambio en  $\lambda_c/k_1$  (desde 2.60 a 2.62 para  $\mathcal{A} = 2.5$  y desde 2.96 a 2.97 para  $\mathcal{A} = 4$ ) produce un gran cambio en el comportamiento de los modos en la etapa de saturación no lineal durante el decaimiento final.

Un efecto clave de la relajación es la transformación de flujos, en este caso, de

toroidal a poloidal debido a la acción del dinamo producto de las fluctuaciones. Este fenómeno es observado para  $\lambda_c/k_1 > 2.6$  cuando  $\mathcal{A} = 2.5$ , y para  $\lambda_c/k_1 > 2.96$  cuando  $\mathcal{A} = 4$ , como se muestra en la figura 5.14 (b-c) y (e-f). Un aspecto a remarcar de estos resultados es que la dinámica de la relajación es disparada repentinamente por encima del límite de estabilidad. Se puede notar que para  $\mathcal{A} = 2.5(4)$ , la configuración con  $\lambda_c/k_1 = 2.6(2.96)$  es altamente inestable pero no muestra la dinámica típica de la relajación, mientras que configuraciones apenas por encima de esos valores muestran una significativa transformación de flujos.

Otro efecto importante de la relajación es el aplanamiento del perfil de  $\lambda$  y la consecuente modificación del perfil de  $q$ . La evolución de los perfiles de  $\lambda$  y  $q$  para configuraciones que tienen inicialmente  $\mathcal{A} = 2.5$  se muestra en la figura 5.16. Estos perfiles proveen una medida del grado de relajación provocado por la inestabilidad. El caso más inestable ( $\lambda_c/k_1 = 2.65$ ) rápidamente desarrolla una completa relajación y alcanza un perfil de  $\lambda$  prácticamente uniforme. Se puede notar que luego de la relajación  $q_t$  se encuentra por debajo de uno, típico de configuraciones del tipo spheromak o FCS. En el segundo caso ( $\lambda_c/k_1 = 2.62$ ), justo por encima del límite de relajación la inestabilidad produce una significativa transformación de flujos y una redistribución de corriente, haciendo que decaiga  $\lambda$  en la columna y crezca en el toroide. Sin embargo, la relajación no es completa debido a que el perfil final de  $\lambda(\psi)$  dista de ser uniforme. Esto se puede observar en la formación de un gradiente de  $\lambda$  dentro del toroide. Finalmente, la evolución del perfil inestable con  $\lambda_c/k_1 = 2.6$ , solo muestra el decaimiento resistivo de la configuración sin evidencias claras de la existencia de mecanismos de relajación.



**Figura 5.16:** Evolución en el tiempo de los perfiles de  $\lambda$  (a,b,c) y  $q$  (d,e,f), para algunos casos de la figura 5.14 (a-c). Los perfiles de  $\lambda$  y  $q$  son calculados a una altura  $z$  del eje magnético ( $z \approx 0$ ).

Como se ha mencionado, el límite de estabilidad obtenido se encuentra en buen acuerdo con el límite de KS para la columna magnética. Cuando  $\lambda_c$  se encuentra por debajo de este límite, la amplitud de todas las perturbaciones iniciales aplicadas decae a tasas similares. Por otra parte, dos de estos casos, mostrados mediante línea a trazos en la figura 5.14 (a) y (d) ( $\lambda = 1.1$  para  $\mathcal{A} = 2.5$  y  $\lambda = 1.6$  para  $\mathcal{A} = 4$ ), se encuentran dentro de la región amarilla de la figura 5.13, y por lo tanto presentan una superficie  $q_t = 1$ . En estos equilibrios se podría esperar que el toroide presente una inestabilidad de kink interna. Sin embargo, esto no ocurre. Esto puede deberse a que el criterio de estabilidad se obtuvo considerando configuraciones magnéticas de elevada relación de aspecto y  $\beta$  distinto de cero. El límite de estabilidad para nuestros equilibrios puede ser diferente debido a que la relación de aspecto es mucho menor, el perfil de  $q$  es casi uniforme y no existen gradientes de presión. En el próximo capítulo veremos que durante el sostenimiento los límites de estabilidad se ven modificados cuando la configuración presenta una región con gradiente de  $\lambda$  y un perfil de  $q_t < 1$  y monótono creciente alrededor del eje magnético.

## 5.5. Conclusión

Se obtuvieron mapas de estabilidad para la inestabilidad de tilt tomando como referencia los autovalores  $k_1$ , obtenido de la ecuación (3.17), y  $k_1^1$  de los trabajos Finn et al. (1981)[45] y Bondeson et al. (1981)[46]. Los mapas sirvieron para la selección de equilibrios inestables al tilt. Usando las ecuaciones MHD resistivas se demostró la aparición de modos inestables en equilibrios dentro de conservadores de flujos aislados con  $e \gtrsim 1.69$ , y se estudió la evolución no lineal (a tiempos grandes) del modo inestable. Comprobamos el buen acuerdo existente entre el límite de estabilidad calculado con nuestro método, y el obtenido en trabajos previos [45, 46] para equilibrios sin flujo externo (spheromak).

Se aplicó el mismo procedimiento para estudiar la estabilidad de equilibrios con campos magnéticos externos, y se encontró que los resultados dinámicos presentan buena correlación con los límites de estabilidad obtenidos mediante el método de la energía (autovalores), aunque con un leve desplazamiento de los umbrales de estabilidad hacia mayores elongaciones. Esto se atribuye a que las simulaciones dinámicas incluyen el “line-tying” de la columna central, favoreciendo a la estabilidad al incluir las fuerzas restitutivas ocasionadas al curvar y comprimir las líneas magnéticas. Por lo tanto, es necesario realizar un mayor trabajo para perturbar la configuración, y esto mejora su estabilidad[63].

Se demostró la posibilidad de obtener configuraciones estables con elongaciones bastante superiores a 1.67. Sin embargo, el factor de amplificación correspondiente al límite de estabilidad se reduce considerablemente al aumentar levemente la elongación y disminuir la relación de flujos externos ( $f$ ). Debido a que este tipo de configuraciones magnéticas originalmente están pensadas para operar con elevada corriente entre electrodos, puede ser importante analizar el corrimiento de los límites de estabilidad de tilt en equilibrios con  $\lambda$  no uniforme.

Para configuraciones magnéticas con  $f = 1$  y conservadores de flujo de elongación  $e = 1$  seleccionamos perfiles de  $\lambda$  del tipo tanh para estudiar la estructura magnética

y la estabilidad de kink en el espacio de parámetros  $(\lambda_c, \mathcal{A})$ . En este espacio se han identificado dos regiones sin superficies  $q = 1$  (ver figura 5.13): (i) la región FCS, con  $q_t < 1$  y un “shear” magnético invertido ( $q$  creciente hacia el eje magnético), y (ii) una región tipo tokamak, con  $q_t > 1$  y “shear” magnético regular ( $q$  decreciente hacia el eje magnético). El primer tipo de perfiles de  $q$  ocurre para  $\lambda$  prácticamente uniforme y una elevada amplificación ( $\mathcal{A}$ ), mientras que el último es alcanzado cuando  $\lambda_c$  es elevado (elevada corriente en la columna magnética) y la amplificación es moderada ( $\mathcal{A} \lesssim 4.5$ ).

En cuanto a la estabilidad de estas configuraciones. Un modo con  $n = 1$  aparece en la columna magnética cuando  $\lambda_c$  es suficientemente elevado como para producir una superficie  $q_c = 1$  (región en rojo de la figura 5.13), lo que significa que la corriente en la columna se encuentra por encima del límite de estabilidad de Kruskal-Shafranov. A través de simulaciones MHD resistivas se mostró que para  $\lambda_c$  justo por encima del límite, la inestabilidad satura y decae sin producir una redistribución de la corriente (o relajación magnética). Un resultado inesperado fue que la relajación se produce de manera repentina cuando  $\lambda_c$  se encuentra por encima de un segundo límite “no lineal” (cambia con  $\mathcal{A}$ ). Cuando esto ocurre, la corriente es rápidamente redistribuida, el perfil de  $\lambda$  se torna uniforme y la configuración adopta una estructura magnética del tipo FCS (totalmente relajada). Este comportamiento disruptivo contrasta con la relajación parcial observada en spheromaks con perfiles de  $\lambda$  lineales [34, 49]. Además, puede ser comparado con el proceso abrupto encontrado durante las oscilaciones “diente de sierra” en tokamaks convencionales, donde se produce un kink de larga duración durante la última fase de la rampa, seguido de una abrupta redistribución de la corriente (es decir el “crash”)[64].

Por el lado de las inestabilidades de corriente en la región toroidal, no se han evidenciado comportamientos inestables. Sin embargo, con estos resultados solo se ha podido comprobar la posibilidad de encontrar equilibrios estables o marginalmente estables en un toroide con  $\beta = 0$  y baja relación de aspecto. La teoría del kink interno ha sido presentada argumentando que los límites de estabilidad pueden no ser condición suficiente pero si necesaria para observar inestabilidad cuando  $q_t < 1$ . Además, se mencionó en la sección 5.4 que el kink interno en el toroide presenta una inestabilidad débil en la aproximación  $\epsilon \ll 1$ , más aún para casos con  $\beta = 0$ . En el trabajo de Wahlberg [56], por ejemplo, cuando  $\beta = 0$  siempre se obtiene estabilidad para los dos únicos tipos de equilibrios mostrados (modifica  $J_\phi(r)$ ). Es por ello que será necesario utilizar equilibrios adecuados para que se alcance el  $q_t$  (o  $\lambda_t$ ) requerido para desestabilizar la configuración e incorporar gradientes de presión. El perfil de  $q_t$  se podría lograr utilizando perfiles de corriente con elevado gradiente, cuyo máximo se encuentre en el eje magnético. En los casos estudiados, con perfiles de  $\lambda$  del tipo tanh,  $\lambda$  es aproximadamente uniforme en la zona toroidal y probablemente no permite obtener el tipo de perfil de corriente necesario para cumplir con estos objetivos.

## Capítulo 6

# Inyección de helicidad en Tokamaks esféricos con columna central de plasma

Utilizamos el método de inyección de helicidad para formar y sostener configuraciones magnéticas toroidales con elongación  $e = 1$  y una relación de flujos externos  $f = 1$ . Mostramos que la tasa de inyección de helicidad define la amplificación de flujos y los perfiles de  $q$  alcanzados por la relajación. Comparamos los resultados de estabilidad obtenidos en el capítulo anterior, sin forzado, con los obtenidos durante el sostenimiento por inyección de helicidad y analizamos el funcionamiento del dínamo magnético. Finalmente, demostramos la posibilidad de formar configuraciones con superficies magnéticas regulares llevando a cero la tasa de inyección de helicidad luego de una situación de sostenimiento cuasi-estacionario.

### 6.1. Introducción

A lo largo de la tesis hemos presentado equilibrios MHD para plasmas confinados en un conservador de flujo cilíndrico y magnetizados con una relación de campos externos dada por el parámetro  $f$  (ver ecuación (4.15)). Estas configuraciones, principalmente aquellas con  $f = 1$ , se han propuesto como una alternativa mejorada del tokamak esférico, donde se reemplaza la columna central sólida por una de plasma magnetizado[11–13, 15]. Esta modificación no solo serviría para lograr las configuraciones magnéticas deseadas, sino que también permitiría la inyección de helicidad a través de electrodos magnetizados por un campo externo. En esta situación la aplicación de una diferencia de potencial producirá una densidad de corriente eléctrica aproximadamente paralela al campo magnético.

El proyecto PROTO-SPHERA[11] propone producir un tokamak esférico reemplazando el conductor central por una columna de plasma. En el mismo se plantea la posibilidad de lograr sostener la corriente toroidal a través de la relajación magnética del plasma. Parte de los estudios relacionados con esta propuesta se enfocan a la resolución de las ecuaciones de equilibrio considerando un estado relajado llamado de Chandrasekhar-Kendall-Furth, que experimentalmente se consigue mediante una con-

figuración apropiada de campos magnéticos externos. Por otro lado, la estabilidad se analiza usando argumentos del principio de la energía [19] y, debido a esto, se excluyen aspectos no lineales que pueden ser importantes en las ecuaciones MHD resistivas. Los estudios de estabilidad se efectúan partiendo de resultados obtenidos resolviendo las ecuaciones de equilibrio MHD, pero no existen trabajos relacionados con el proceso de formación y sostenimiento desde el vacío mediante la inyección de helicidad que puedan dar información fehaciente sobre la posibilidad de alcanzar este objetivo.

Existen pocos trabajos relacionados con la inyección de helicidad en configuraciones magnéticas toroidales similares a la PROTOSPHERA. Uno de ellos es el trabajo de Sovinec et. al [15], donde se resuelven las ecuaciones MHD resistivas en conservadores de flujo cilíndricos. Sin embargo, como método de inyección de helicidad se utilizan corrientes eléctricas en las paredes del conservador de flujo y una resistividad no uniforme que se incrementa unas cien veces en regiones cercanas a la superficie. Si bien este método es efectivo, sin el gradiente de resistividad elevado en la superficie es muy difícil lograr el funcionamiento del mismo debido a la pérdida de estabilidad numérica.

En este capítulo mostraremos la posibilidad de formar y sostener configuraciones magnéticas toroidales con una relación de flujos magnéticos externos  $f = 1$  (ver caps. 4 y 5) partiendo de un campo de vacío. Para balancear el decaimiento resistivo, utilizaremos un método de inyección de helicidad empleado con anterioridad [17, 18] para la formación y sostenimiento de spheromaks ( $f = 0$ ), que consiste en aplicar un campo de velocidad tangencial en la superficie del conservador de flujo. Además, veremos que durante el sostenimiento se observan estados marginalmente estables, donde se evidencian fenómenos relacionados tanto a la estabilidad de la columna central como al kink interno de configuración toroidal. Esto hace que la densidad de corriente en la columna central no sea estacionaria, impidiendo la formación de superficies magnéticas cerradas. Finalmente, mostraremos que al detener la inyección de helicidad se logra la formación de superficies magnéticas cerradas en el toroide. Si, partiendo de esta situación se utilizan métodos alternativos de sostenimiento podría ser factible obtener estados estacionarios con fluctuaciones magnéticas bajas, apropiadas para lograr un elevado confinamiento magnético.

## 6.2. Balance de helicidad magnética

En esta sección se presenta el balance de helicidad magnética de un plasma descrito por el modelo MHD resistivo definido en el capítulo 2. El balance de helicidad dependerá de las condiciones de contorno del conservador de flujo y de la resistividad del plasma. Veremos que a partir de este análisis podremos encontrar las condiciones necesarias para la inyección de helicidad en el plasma.

Consideremos un volumen definido por un cilindro atravesado por un campo magnético externo en las superficies  $z = \pm h/2$ , que llamamos campo magnético “de vacío”  $\mathbf{B}_0$ , ver figura 4.2. Este campo puede obtenerse del rotor de un potencial vector  $\mathbf{A}_0$  ( $\mathbf{B}_0 = \nabla \times \mathbf{A}_0$ ). Debido a que el campo magnético atraviesa el volumen, debemos usar el concepto de helicidad relativa (ver ecuación (3.8)) integrada en el volumen  $V$  para preservar las propiedades de invariancia de medida de la helicidad magnética. De (3.8),



con  $V_a = V$  se tiene:

$$H_{rel} = \int_V (\mathbf{A} + \mathbf{A}_0) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) dV \quad (6.1)$$

La variación en el tiempo con  $V$  fijo resulta:

$$\frac{dH_{rel}}{dt} = \int_V \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{A}_0}{\partial t} \right) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) + (\mathbf{A} + \mathbf{A}_0) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} \right) \right] dV \quad (6.2)$$

Recordando que todo campo eléctrico puede expresarse como la contribución de una parte electrostática más otra inductiva  $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ , usando la identidad vectorial  $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{E}$  y teniendo en cuenta que en la superficie de un conservador de flujo  $\partial\psi/\partial t|_S = 0$  (ver ec. (1.8)), es decir  $\mathbf{B} \cdot \hat{n}|_S = \mathbf{B}_0 \cdot \hat{n}|_S$ , se obtiene

$$\frac{dH_{rel}}{dt} = -2 \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{B}_0) dV + \int_S [(\mathbf{A} + \mathbf{A}_0) \times (\mathbf{E} - \mathbf{E}_0)] \cdot \hat{n} dS \quad (6.3)$$

Como el campo de vacío es estático  $\partial\mathbf{A}_0/\partial t = 0$ ,  $\mathbf{E}_0 = -\nabla\phi_0$ , donde  $\mathbf{E}_0 \times \hat{n} = 0$  debido a que el conservador de flujo es equipotencial y se encuentra aislado de los electrodos. Con estas suposiciones obtenemos:

$$\frac{dH_{rel}}{dt} = -2 \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} dV - 2 \int_S \phi_0 \mathbf{B}_0 \cdot \hat{n} dS + \int_S [(\mathbf{A} + \mathbf{A}_0) \times \mathbf{E}] \cdot \hat{n} dS \quad (6.4)$$

De aquí, se puede descomponer el balance de helicidad en tres partes principales. El primer término, que podemos escribir:

$$-2 \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} dV = -2\eta \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} dV \quad (6.5)$$

está relacionado con la disipación resistiva de volumen, y se obtiene al considerar la ley de Ohm generalizada del modelo MHD ( $\mathbf{E} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta\mathbf{J}$ ), donde  $\eta$  es la resistividad, que suponemos uniforme. El segundo término de (6.4), es la inyección de helicidad por medio de un potencial electrostático. Si tomamos la superficie como  $S = S_1 + S_2$ , donde  $S_1$  ( $S_2$ ) es la zona donde entra (sale) el campo magnético, con flujo magnético  $\psi_1 = -\psi_2$  y potencial eléctrico  $\phi_1$  ( $\phi_2$ ), obtenemos

$$-2 \int_S \phi_0 \mathbf{B} \cdot \hat{n} dS = 2(\phi_1 - \phi_2)\psi(S_1) \quad (6.6)$$

Un potencial electrostático entre electrodos permitiría inyectar helicidad al plasma. Sin embargo, debido a que en los plasmas descritos por el modelo MHD no está permitida la separación de cargas, no existen términos en las ecuaciones para aplicar de manera directa o indirecta un campo electrostático. Por lo tanto, la inyección de helicidad a partir de este término no puede ser considerada. Sin embargo, el método que describiremos a continuación puede conducir a resultados similares. Usando la ley de Ohm generalizada el tercer término de la ecuación (6.4) puede reescribirse:

$$[(\mathbf{A} + \mathbf{A}_0) \times \mathbf{E}] \cdot \hat{n} = -[(\mathbf{A} + \mathbf{A}_0) \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})] \cdot \hat{n} + \eta [(\mathbf{A} + \mathbf{A}_0) \times \mathbf{J}] \cdot \hat{n} \quad (6.7)$$

Usando las identidades vectoriales sobre el primer término del miembro de la derecha:

$$[(\mathbf{A} + \mathbf{A}_0) \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})] \cdot \hat{n} = \{[(\mathbf{A} + \mathbf{A}_0) \cdot \mathbf{B}]\mathbf{u} + [(\mathbf{A} + \mathbf{A}_0) \cdot \mathbf{u}]\mathbf{B}\} \cdot \hat{n} \quad (6.8)$$

Dado que no permitimos que un flujo de plasma atraviese la superficie,  $\mathbf{u} \cdot \hat{n} = 0$ , y por lo tanto:

$$[(\mathbf{A} + \mathbf{A}_0) \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})] \cdot \hat{n} = [(\mathbf{A} + \mathbf{A}_0) \cdot \mathbf{u}]\mathbf{B} \cdot \hat{n} \quad (6.9)$$

Por otro lado, el término en la corriente de la ecuación (6.7) se puede descomponer en la forma

$$\begin{aligned} [(\mathbf{A} + \mathbf{A}_0) \times \mathbf{J}] \cdot \hat{n} = & \{[(A_\phi + A_{0\phi})J_z - (A_z + A_{0z})J_\phi]\hat{e}_r + \\ & [(A_z + A_{0z})J_r - (A_r + A_{0r})J_z]\hat{e}_\phi + \\ & [(A_r + A_{0r})J_\phi - (A_\phi + A_{0\phi})J_r]\hat{e}_z\} \hat{n} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Al realizar el producto escalar con la normal  $\hat{n}$  a la superficie del cilindro, solo quedarán las componentes en dirección  $\hat{e}_z$  para la integral de superficie en  $z = \pm h/2$ , y el término de dirección radial  $\hat{e}_r$  para la integración sobre la superficie  $r = a$ . La integral (6.4) queda:

$$\begin{aligned} \frac{dH_{rel}}{dt} = & -2\eta \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} dV \\ & - \int_S [(\mathbf{A} + \mathbf{A}_0) \cdot \mathbf{u}]\mathbf{B} \cdot \hat{n} dS \\ & + \eta \int_{S_a} [(A_\phi + A_{0\phi})J_z - (A_z + A_{0z})J_\phi] dS \\ & + \eta \int_{S_{+h/2}} [(A_r + A_{0r})J_\phi - (A_\phi + A_{0\phi})J_r] dS \\ & - \eta \int_{S_{-h/2}} [(A_r + A_{0r})J_\phi - (A_\phi + A_{0\phi})J_r] dS \end{aligned} \quad (6.11)$$

Como en las superficies del conservador de flujo se debe satisfacer  $\partial_t \psi(r, z = \pm h/2) = \partial_t \psi(a, z) = 0$ , y como la componente toroidal del potencial vector  $A_\phi|_S = (\psi/2\pi r)|_S$ , tenemos que  $A_\phi$  en la superficie es constante, con lo cual  $A_\phi = A_{0\phi}$ . Por otro lado, la conservación del flujo implica que la integral cerrada de la ecuación (2.6) debe ser nula para todo  $r$  en las superficies  $z = \pm h/2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(r, \pm h/2)}{\partial t} = & \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{z} dS = \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \hat{z} dS = \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ = & \oint_c [-(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \mathbf{J}] \cdot d\mathbf{l} \\ = & \int_0^{2\pi} [-(\mathbf{u} \times \mathbf{B})_\phi + \eta \mathbf{J}_\phi] r d\phi = 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

y de manera similar al evaluar  $\partial \psi / \partial t = 0$  en la superficie ( $r = a, z$ ). Para que esto se satisfaga,  $J_\phi$  debe anularse en la integral si suponemos simetría de revolución y condición de no deslizamiento  $u_r = u_z = 0$ . Esta consideración es importante para permitir un



adecuado funcionamiento del método numérico. Por lo tanto, las condiciones de borde impuestas en las superficies deben ser tales que  $J_\phi = 0$ . Tomando estos desarrollos y reagrupando, la ecuación (6.4) queda:

$$\begin{aligned} \frac{dH_{rel}}{dt} = & -2 \int_V \eta \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} dV \\ & -2 \int_S (\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{u}_\phi) \mathbf{B} \cdot \hat{n} dS \\ & +2 \int_{S_a} \eta \mathbf{A}_0 J_z dS -2 \int_{S_{+h/2}} \eta \mathbf{A}_0 J_r dS +2 \int_{S_{-h/2}} \eta \mathbf{A}_0 J_r dS \end{aligned} \quad (6.13)$$

Los tres últimos términos de la ecuación anterior se han usado en algunos trabajos para inyectar helicidad en el plasma [15, 65]. Por ejemplo, en el trabajo de Sovinec et. al (2001) [15], se ha impuesto una corriente  $\mathbf{J} = J_z \hat{e}_z = [r^{-1} \partial(rB_\phi)/\partial r] \hat{e}_z$  en la superficie  $r = a$  del cilindro, acompañado de un aumento sustancial de la resistividad ( $\eta = \eta(r)$ ) en la región  $r \approx a$  para lograr incrementar y controlar la inyección de helicidad. En esta tesis, por simplicidad se optó por suponer  $\eta$  uniforme y corrientes tangenciales nulas en las superficies ( $\mathbf{J} \times \hat{n} = 0$ ). Finalmente, el balance de helicidad utilizado a lo largo de la tesis resulta:

$$\frac{dH_{rel}}{dt} = -2\eta \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} dV -2 \int_{S_{-h/2}} A_\phi u_\phi B_z dS +2 \int_{S_{h/2}} A_\phi u_\phi B_z dS \quad (6.14)$$

Donde hemos usado las superficies  $z = \pm h/2$  para introducir un campo de velocidad toroidal para inyectar helicidad magnética.

### 6.3. Inyección de helicidad

En capítulos anteriores hemos estudiado configuraciones cuya helicidad decae debido al término resistivo de la ecuación (6.14). En esta sección estudiaremos el método de inyección de helicidad magnética mediante la inclusión de un campo de velocidad tangencial en la superficie del conservador de flujo y demostraremos posteriormente su utilización para lograr la formación y el sostenimiento ( $dH_{rel}/dt \approx 0$ ) de una configuración magnética toroidal.

Un campo de velocidad perpendicular al campo magnético produce el arrastre de las líneas magnéticas respecto a un sistema de referencia fijo en el espacio. Esto puede interpretarse también como la generación de una corriente eléctrica inducida por un “potencial eléctrico”, solo que, en este caso será debido a la acción del término  $(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$  de la ley de Ohm (ver (2.6)). De acuerdo a (6.14), el campo de velocidad utilizado tiene dirección toroidal  $\mathbf{u} = u_\phi(r) \hat{e}_\phi$ . El campo magnético  $B_z$  y el potencial vector  $A_\phi$  pueden escribirse en función del flujo magnético poloidal  $\psi(r, \pm h/2)$ , que indicaremos solo como  $\psi_{\pm h/2}(r)$ , y resultan:

$$B_z(r) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\psi(r)}{dr} \quad ; \quad A_\phi(r) = \frac{\psi(r)}{2\pi r} \quad (6.15)$$

Incluyendo estos términos en (6.14), la parte del balance de helicidad debida a un

campo de velocidad ( $\partial H_{rot}/\partial t$ ) queda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{rot}}{\partial t} &= - \int_{S_{-h/2}} A_\phi u_\phi B_z dS + \int_{S_{+h/2}} A_\phi u_\phi B_z dS \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^a \left( -u_\phi(\tilde{r}, -h/2) \psi_{-h/2}(\tilde{r}) \frac{d\psi_{-h/2}(\tilde{r})}{d\tilde{r}} + u_\phi(\tilde{r}, h/2) \psi_{h/2}(\tilde{r}) \frac{d\psi_{h/2}(\tilde{r})}{d\tilde{r}} \right) d\tilde{r} \end{aligned} \quad (6.16)$$

La tasa de inyección queda definida en función de la forma que adopten el campo magnético y el perfil de velocidad en la superficie. Como hemos comentado arriba, se necesita una velocidad relativa entre las líneas entrantes y salientes de la superficie. Una rotación rígida ( $u_\phi = r\omega$ ), puede dar como resultado una inyección de helicidad neta nula, dependiendo del flujo magnético en  $r = a$ . En este trabajo, utilizamos un perfil de velocidades que ha sido implementado anteriormente de manera exitosa [17, 18], y esta definido como:

$$u_\phi(r) = \begin{cases} 4u_0(\pm h/2)r(r - r_e)/r_e^2 & \text{si } 0 \leq r \leq r_e, \\ 0 & \text{si } r_e < r \leq a \end{cases} \quad (6.17)$$

Donde  $u_0$  es una constante definida como  $u_0(-h/2) = -u_0(h/2) < 0$ . Es importante que esta función sea continua al menos a orden cero para evitar conflictos en la convergencia numérica. El perfil seleccionado provoca el arrastre de las líneas de campo magnético de la columna central, lo que se traduce en un aumento en la corriente toroidal y axial  $\mathbf{J} = (J_z, J_\phi)$  que da origen al screw-pinch de la columna magnética.

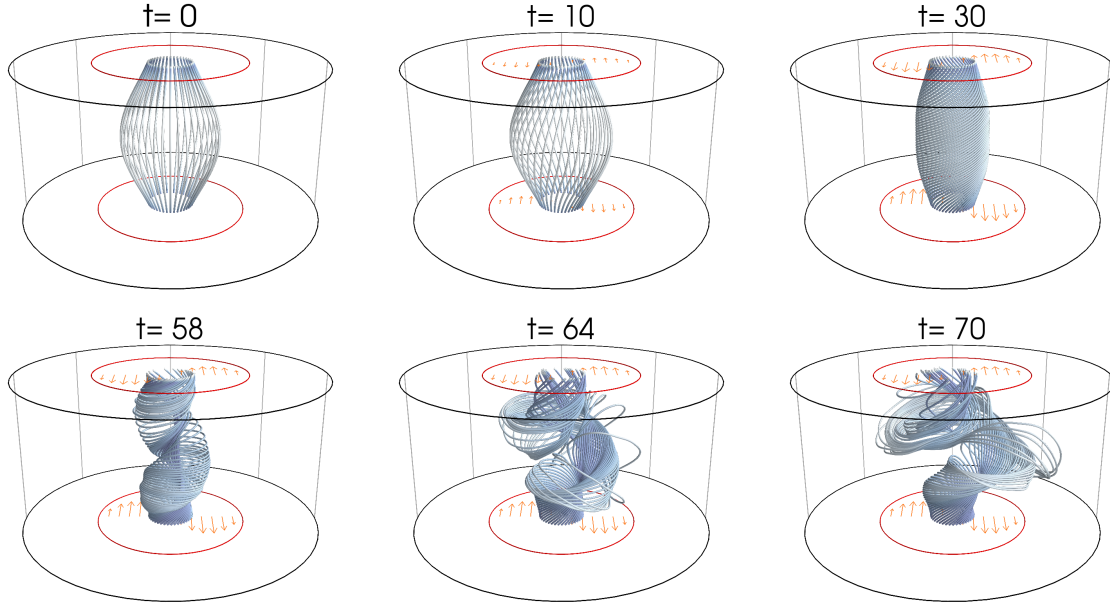
## 6.4. Formación y sostenimiento

El método de inyección de helicidad introducido en la sección 6.3, se aplicó a una de las configuraciones presentadas en los capítulos 4 y 5. En forma semejante a lo hecho en el capítulo 5 para estudiar inestabilidades y relajación magnética, se utilizaron los métodos numéricos del apéndice A para resolver las ecuaciones MHD resistivas, pero esta vez adicionando un campo de velocidad tangencial en las superficies del conservador de flujo para inyectar helicidad a la configuración.

Como condición inicial, partimos de configuraciones con campos de vacío ( $\mathbf{J} = 0$ ), que son las soluciones de la ecuación 4.5 con  $\lambda = 0$ . Como se ha probado en trabajos previos [17, 18], el campo de velocidades impuesto en las superficies del conservador de flujo generará una densidad de corriente eléctrica  $\mathbf{J}_\parallel$  suficientemente alta como para alcanzar los límites de la estabilidad de corriente de un screw-pinch. Pese a que en el capítulo 5 hemos estudiado la estabilidad de la columna magnética en equilibrio con configuraciones toroidales y  $\dot{H}_{rot} = 0$  (ver ec. (6.16)), partiendo del vacío se alcanzan situaciones similares de inestabilidad en el screw-pinch. Por consiguiente, debido a la elevada energía magnética localizada en la columna central, el proceso de relajación produce el crecimiento de la corriente toroidal en el plasma debido al dínamo magnético generado por las fluctuaciones.

En la figura 6.1, podemos observar el comportamiento del campo magnético en la columna al inyectar helicidad a la configuración. Partiendo del vacío ( $\mathbf{J} = 0$ ) en  $t = 0$ ,

se aplica un campo de velocidad de la forma (6.17), en las superficies  $z = \pm h/2$ , que crece linealmente hasta alcanzar su valor máximo en  $t = 20$ . El campo de velocidades arrastra las líneas magnéticas, e incrementa la corriente en la columna. La estructura helicoidal de la inestabilidad de kink se observa para  $t \gtrsim 50$  y evoluciona provocando la inducción de corrientes toroidales.

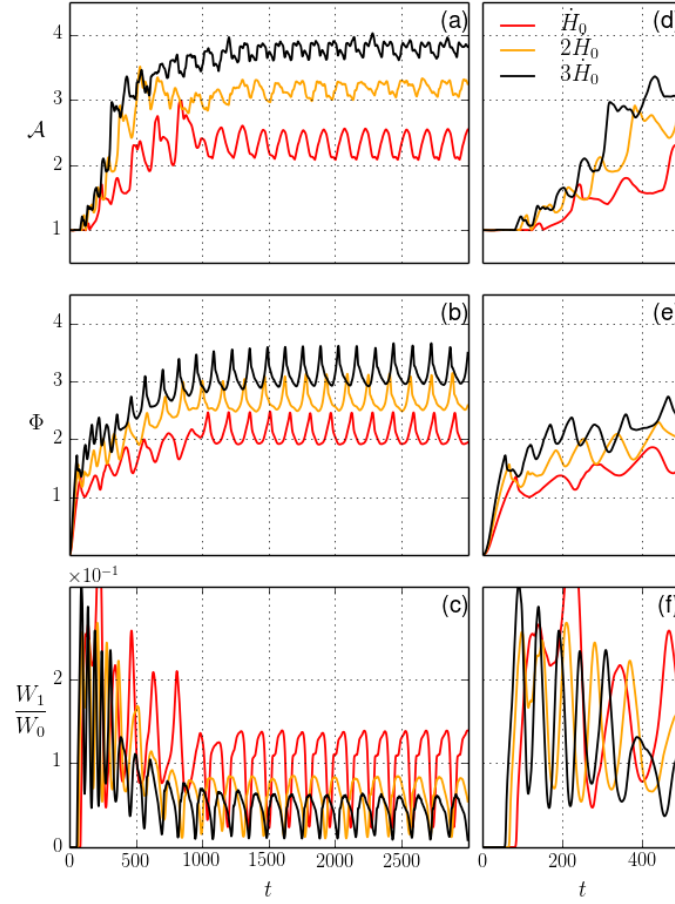


**Figura 6.1:** Evolución de las líneas de campo magnético (PCC) que atraviesan los electrodos en los que se inyecta helicidad. Los campos de velocidades son indicados mediante flechas de color rojo en las superficies, y las circunferencias rojas son los límites de los electrodos de radio  $r_e$ . La evolución de la inestabilidad de kink se observa para  $t \geq 58$ .

En la figura 6.2 (a,b,d y e) se muestran la evolución de la amplificación de flujo poloidal ( $\mathcal{A}$ ) (ver ec. (4.16)) y el flujo toroidal máximo ( $\Phi$ ) partiendo desde el vacío ( $\mathcal{A}(t=0) = 1$ ,  $\Phi_{max}(t=0) = 0$ ), con tasas de inyección de helicidad proporcionales a  $\dot{H}_0$ , donde  $\dot{H}_0$  es la tasa de inyección de helicidad que se obtiene cuando  $u_0 = 0.015$  (ver ecuaciones 6.17 y 6.16). El flujo magnético toroidal aumenta desde el instante inicial, que tiene  $\Phi = 0$ , debido al incremento de la corriente  $J_z$  por la acción del campo de velocidades en el electrodo. Por otro lado, el flujo poloidal máximo se mantiene constante mientras la columna central se conserva estable y axisimétrica. Luego de un tiempo suficiente ( $t \approx 50$ ), la corriente en el screw-pinch alcanza los límites de estabilidad y la configuración magnética relaja para disminuir su energía. En este proceso se produce una transferencia de energía hacia modos no axisimétricos, haciendo que el flujo toroidal comience a decaer y se incremente el flujo poloidal, conservando aproximadamente la helicidad magnética relativa.

Podemos ver en la figura 6.2 (c) y (f), que durante la evolución de la inestabilidad el modo  $n = 1$  crece según lo establecido en el análisis de estabilidad de un screw-pinch [57]. Si bien los modos con  $n > 1$  también crecen, la energía relativa es de uno o varios ordenes de magnitud inferior, dependiendo del numero del modo. Esto se debe a que poseen tasas de crecimiento más bajas y su disipación es superior.

Para tiempos suficientemente largos ( $t \gtrsim 1000$ ) se alcanza un balance entre la inyección de helicidad y la disipación óhmica y la configuración logra un estado cuasi-

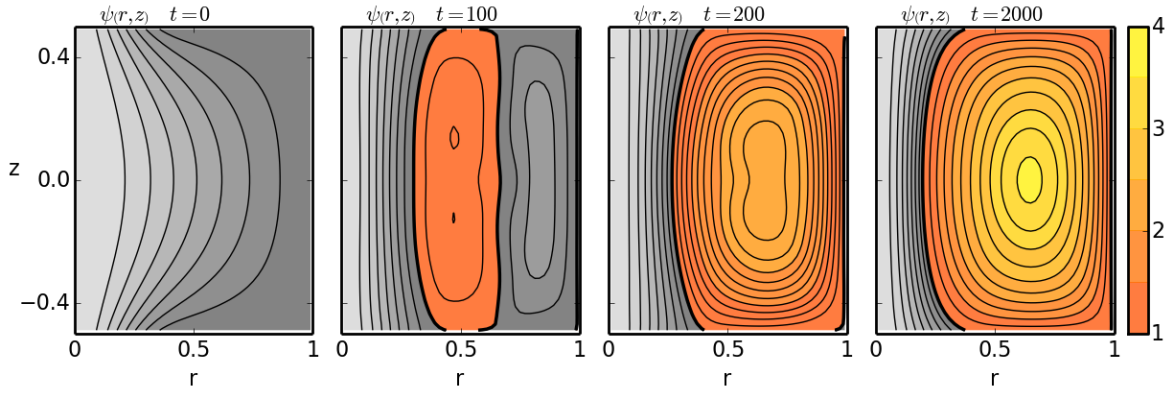


**Figura 6.2:** Evolución en el tiempo de la amplificación de flujo poloidal  $\mathcal{A}$ , flujo toroidal máximo  $\Phi$  y energía magnética relativa del modo  $n = 1$ . Se muestran procesos de formación y sostenimiento de configuraciones magnéticas toroidales con tasas de inyección de helicidad  $\dot{H}_0$ ,  $2\dot{H}_0$  y  $3\dot{H}_0$ . En las figuras d-f, se muestran en una escala apropiada las evoluciones en la etapa de formación.

estacionario (ver figura 6.2), es decir donde  $\langle \dot{H}_{rel} \rangle \approx 0$ . El comportamiento oscilatorio es particular de este tipo de configuraciones toroidales y proviene de las características no lineales de la dinámica. Los resultados son similares a los observados en experimentos de laboratorio que utilizan métodos de inyección de helicidad [10, 66, 67]. En la siguiente sección describiremos con más detalle el origen de las fluctuaciones.

En la formación y sostenimiento, el flujo poloidal se origina y sostiene por la distribución de energía que se produce desde la columna magnética hacia el resto del volumen, debido a la acción del dínamo magnético  $\mathbf{E}_d = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{B} \rangle$  causado por la presencia de modos no axisimétricos. Por otro lado, este proceso se completa debido a la resistividad, que permite que los “tubos” de flujo magnético se reconecten. En la figura 6.3 se observan las superficies de flujo magnético poloidal ( $\psi(r, z) = cte$ ), para el caso con tasa de inyección de helicidad  $\dot{H} = 3\dot{H}_0$ , calculadas utilizando únicamente el modo  $n = 0$  del campo magnético. Se puede ver el crecimiento del flujo magnético poloidal y la aparición de superficies magnéticas cerradas debido al crecimiento de la corriente toroidal en la región con  $\psi > 1$ . Es importante aclarar que las superficies magnéticas cerradas están presentes solo si las fluctuaciones son bajas en relación al

modo axisimétrico. En este caso, para obtener superficies magnéticas comparables a las obtenidas en los cálculos del equilibrio MHD, se debieron eliminar los modos con  $n > 0$ , cuya energía relativa es inferior a  $10^{-1}$  (ver figura 6.2). Por lo tanto, esta figura es solo descriptiva. Sin embargo, confirma una vez más la capacidad del método de inyección de helicidad para lograr amplificación de flujo, o el incremento de la corriente toroidal promedio, aunque no garantiza la formación de estructuras magnéticas cerradas.



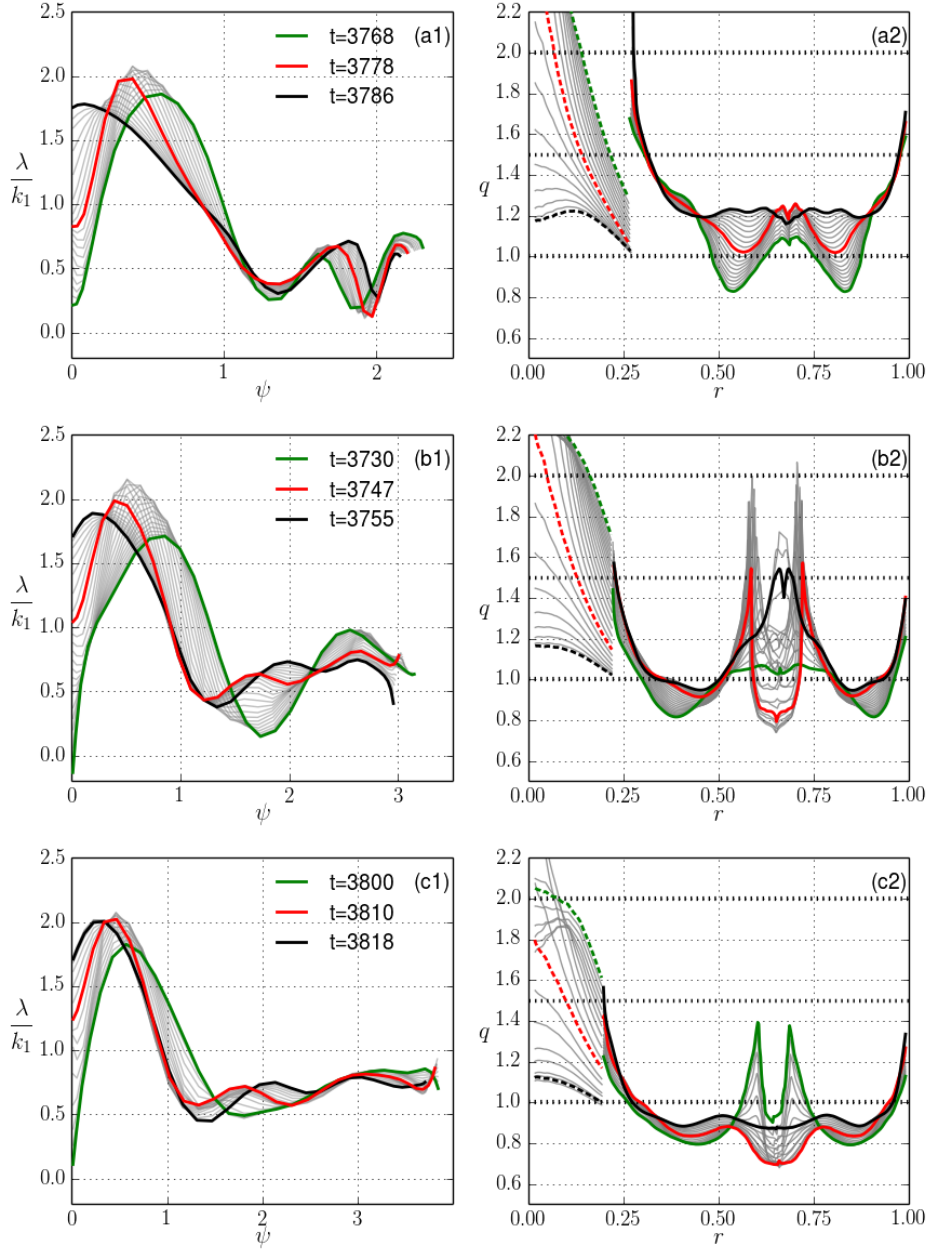
**Figura 6.3:** Evolución del flujo magnético poloidal en el plano  $(r, z)$  para el caso con tasa de inyección de helicidad  $3\dot{H}_0$  de la figura 6.2. En  $t = 0$  solo se tienen campos de vacío ( $\mathbf{J} = 0$ ,  $\psi_{max} = 1$ ), y las regiones de color anaranjado indican amplificación de flujo, con  $\psi > 1$ . Para el cálculo se utilizaron únicamente los campos axisimétricos ( $n = 0$ ).

#### 6.4.1. Relajación magnética y estabilidad

La presencia de niveles saturados de fluctuaciones significa que el sistema opera alrededor del límite de estabilidad. La figura 6.4 muestra los perfiles de  $\lambda(\psi)$  y  $q(r)$  para los tres casos de la figura 6.2 en un intervalo de tiempo en el que se alcanza un mínimo local del modo  $n = 1$  durante el periodo de sostenimiento.

Recordemos que, en estos casos, la configuración y su perfil de  $\lambda$  se forman de manera espontánea mediante la relajación y auto-organización, desde los campos de vacío ( $\lambda = 0$ ) por el forzado impuesto en los electrodos. A pesar de los significativos niveles de fluctuaciones, el valor medio de los perfiles de  $\lambda(\psi)$  adquiere una dependencia tipo  $\tanh$ , similar a la adoptada en el capítulo anterior para estudiar los equilibrios ST-PCC y su estabilidad. Además, durante el sostenimiento la configuración marginalmente estable desarrolla un gradiente de  $\lambda$  interno y una superficie  $q_t = 1$  como se anticipó en el estudio de la relajación sin inyección de helicidad (ver figuras 5.16 (b) y (e)). El comportamiento durante el sostenimiento es análogo al de los spheromaks sostenidos mediante el cañón coaxial ( $f = 0$ ), pero con un gradiente de  $\lambda$  opuesto en signo y valores de  $q$  en la separatriz superiores a los alcanzados en el eje magnético. De acuerdo a la información disponible, este tipo de perfiles no ha sido reportado anteriormente en configuraciones compactas.

En las figuras 6.4, las líneas en colores corresponden a los instantes de tiempo particulares en que se realizó el cálculo de  $\lambda$  y  $q$ . Como referencia, la curva roja corresponde al instante en que la energía del modo  $n = 1$  es mínima, la curva verde a un instante anterior arbitrario, y la negra a un instante posterior, cuando se alcanza el máximo



**Figura 6.4:** Perfiles de  $\lambda(\psi)$  y  $q(r)$  para un intervalo de mínima amplitud de las fluctuaciones en las simulaciones de la figura 6.2. La figura (a) corresponde al caso con  $\dot{H} = \dot{H}_0$ , (b) a  $2\dot{H}_0$  y (c)  $3\dot{H}_0$ . La línea en color rojo corresponde a un instante con  $W_1/W_0$  mínimo, en verde a un instante previo con decaimiento del modo  $n = 1$ , y en negro al instante en que el flujo toroidal es máximo (o límite de estabilidad del kink en la columna  $q_c = 1$ ).

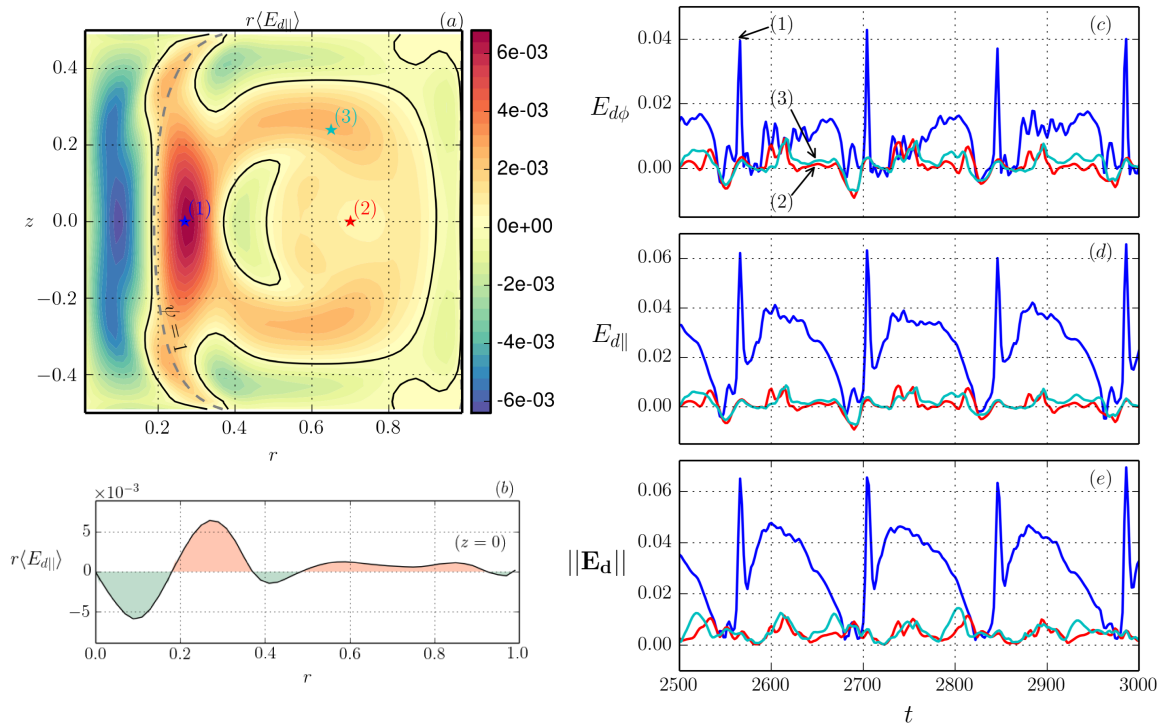
del flujo toroidal (inicio de la transformación de flujo). Es importante observar que en todos los casos  $q_c \geq 1$ , y la transformación de flujo magnético se produce cuando se alcanza el mínimo  $q_c \equiv 1$ . Se puede decir que en todos los casos  $q_c = 1$  en la columna es un límite mínimo de estabilidad. Sin embargo, el crecimiento del modo  $n = 1$  comienza en un instante previo a alcanzar  $q_c = 1$  si la región toroidal toma valores de  $q_t < 1$  y  $\lambda(\psi > 1)$  tiene pendiente positiva hacia el eje magnético (ver figuras 6.4 (b) y (c)). De no alcanzarse  $q_t < 1$  en el toroide, el crecimiento del modo coincide con  $q_c \approx 1$  (ver 6.4 (a)). Esto muestra la importancia de los valores de  $q_t$  y  $q_c$  para los márgenes de estabi-



lidad de toda la configuración. Debemos recordar que en el análisis de la inestabilidad de kink del capítulo anterior, los equilibrios con perfiles de  $\lambda$  uniformes en la región toroidal (donde  $\psi > 1$ ) eran estables pese a la presencia de superficies con  $q_t < 1$ .

### Dínamo magnético

Consideramos el caso de la figura 6.2 con tasa de inyección de helicidad  $\dot{H} = 3\dot{H}_0$ . En la figura 6.5 (a) se muestra el promedio temporal entre  $t_1 = 2500$  y  $t_2 = 3500$  del campo eléctrico (multiplicado por  $r$ ) paralelo al campo magnético regular ( $n = 0$ ) producido por el dínamo durante un intervalo de sostenimiento donde la tasa de inyección es comparable con la disipación resistiva ( $\langle \partial/\partial t \approx 0 \rangle$ ), y en (b) el perfil en función de  $r$  a una altura  $z = 0$ . Las figuras (c),(d) y (e) muestran la evolución temporal de la componente toroidal, la paralela y el módulo en los tres puntos indicados en (a). En (a) se distinguen las zonas donde se produce la mayor amplitud media, a la que contribuyen principalmente los instantes en los que se alcanza un elevado valor del dínamo. El campo eléctrico medio depende fundamentalmente del módulo de las fluctuaciones magnéticas, de la velocidad y al ángulo de fase entre  $\mathbf{u}_n$  y  $\mathbf{B}_n$ , siendo el módulo responsable de la intensidad máxima alcanzada y la fase define las zonas de dínamo ( $\langle \mathbf{E}_d \rangle > 0$ ) y anti-dínamo ( $\langle \mathbf{E}_d \rangle < 0$ ). La formación de una estructura dínamo y anti-dínamo es evidente, y el resultado es similar al observado en el experimento SPHEX[41].



**Figura 6.5:** Campo eléctrico producido por el dínamo magnético para el caso con  $\dot{H} = 3\dot{H}_0$  durante el sostenimiento. En (a) se muestra el promedio temporal del campo eléctrico paralelo al campo magnético regular ( $n = 0$ ) multiplicado por el radio ( $r$ ). Los contornos en negro corresponden a  $\langle E_{d||} \rangle = 0$  y la línea a trazos de color gris a la ubicación media de la separatriz. En (b) se graficó el valor a una altura  $z = 0$ . Las figuras (c),(d) y (e) muestran la evolución temporal de las componentes toroidal y paralela del campo eléctrico y su módulo en los tres puntos indicados en (a).

La mayor contribución al sostenimiento de la corriente proviene del dínamo localizado en la región (1) de la figura 6.5 (a), cercano a la separatriz ( $r_s \approx 0.2$  en  $z = 0$ ). En esta zona, las fases relativas entre las fluctuaciones en  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{B}$  producidas por el forzado de la columna coinciden en promedio. La aparición de máximos abruptos en el campo del dínamo, fundamentalmente en (1), se produce porque la configuración transita por estados inestables, produciendo el crecimiento de modos no axisimétricos que contribuyen con cantidades  $\langle \mathbf{u}_n \times \mathbf{B}_n \rangle \neq 0$  (con  $n > 0$ ). En el intervalo de tiempo de las figuras 6.5 (c-d), claramente no se puede hablar de estados cuasi-estacionarios porque no se establece un flujo de energía constante, y por lo tanto, no podemos suponer la presencia de un campo eléctrico instantáneo que satisfaga  $E_{d\parallel} \approx \eta J_{\parallel}^0$ . Sin embargo, estos comportamientos abruptos son responsables de sostener y distribuir la corriente debido al flujo de energía en el volumen dado por un vector de Poynting ( $\mathbf{E}_d \times \mathbf{B}$ ) no nulo. El dínamo existente en los intervalos de tiempo en los que las fluctuaciones son bajas, claramente no es suficiente para conservar un flujo de energía estacionaria dado únicamente a través de la inyección de helicidad. Esto se evidencia al observar las oscilaciones en los flujos magnéticos toroidal y poloidal (o  $\mathcal{A}$ ) de las figuras 6.2 (a) y (b). Por eso es que la corriente satura y la configuración relaja debido a la manifestación de inestabilidades, provocando que  $\partial \mathbf{B} / \partial t$  por momentos sea muy elevado.

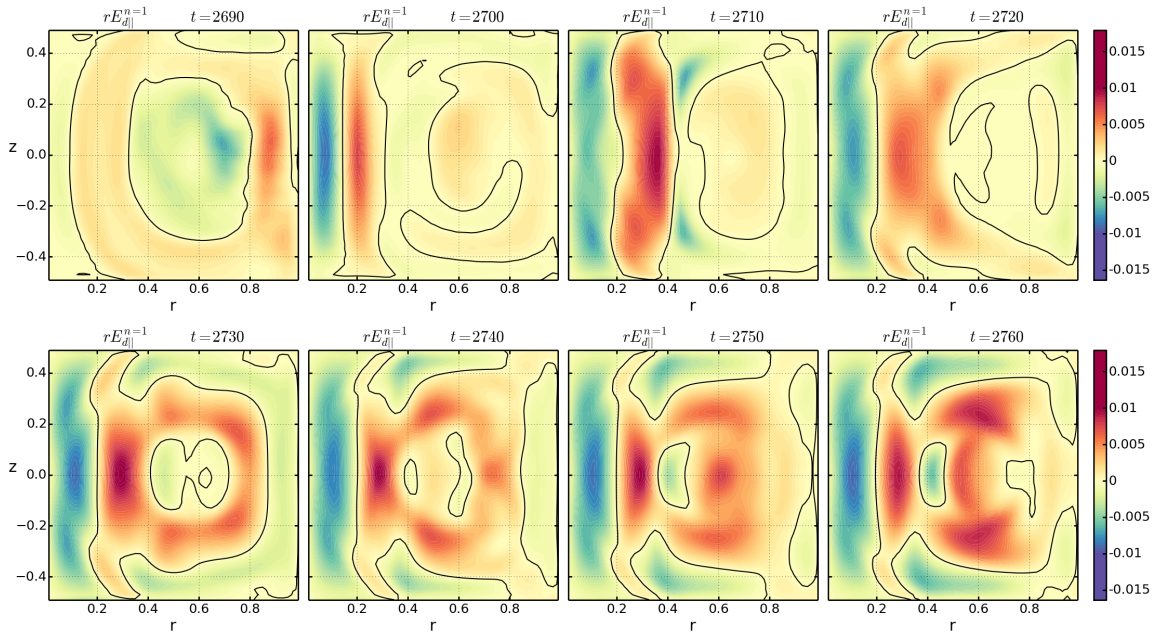
De la figura 6.5 (a) y (b), y las variaciones temporales en (c)-(e), se observa la presencia de un dínamo positivo en las regiones (2) y (3) que mantiene la corriente  $\mathbf{J}_{\parallel}$ . Por otro lado, las diferencias en el dínamo toroidal son menores, salvo los picos que aparecen en la zona 1. Esta última observación resulta diferente para la componente paralela del dínamo. En ésta se distinguen diferencias entre los valores de la región toroidal y los de la columna magnética, siendo en esta última mayores el valor medio y la amplitud de las fluctuaciones. En la columna magnética el valor medio del dínamo poloidal es mayor que el del toroidal (deducido por ortogonalidad), esto se debe a que en esta zona la corriente y el campo son mayoritariamente poloidales. En el proceso de relajación la transformación de flujos se produce fundamentalmente en la columna y su energía es distribuida hacia la región toroidal.

## Reconexión magnética

En la figura 6.6 vemos la evolución del dínamo en un periodo de tiempo de medio ciclo, desde un mínimo del modo  $n = 1$  hasta aproximadamente alcanzar un nuevo máximo. En el instante en que se desarrolla la inestabilidad, el dínamo crece desde la columna magnética y evoluciona expandiéndose hacia la región toroidal. Entre los tiempos  $t = 2720$  y  $2730$  la región de campo de dínamo positivo pasa de localizarse principalmente en una zona cercana a la columna magnética, a distribuirse hacia la región toroidal. Veremos a continuación que esta transición ocurre de manera periódica y se inicia en instantes que pueden definirse con buena exactitud al observar el incremento del campo de velocidad perpendicular, lo que estaría indicando una fase de reconexión magnética. Esta interacción entre la columna magnética y la región toroidal produce el efecto deseado, es decir la inducción de una corriente toroidal. Esto se observa en las figuras entre los tiempos  $t = 2740$  a  $2760$ .

En la figura 6.7 (a) se muestran los flujos magnéticos, las contribuciones de las componentes paralela y perpendicular de la velocidad a la energía cinética, y la energía



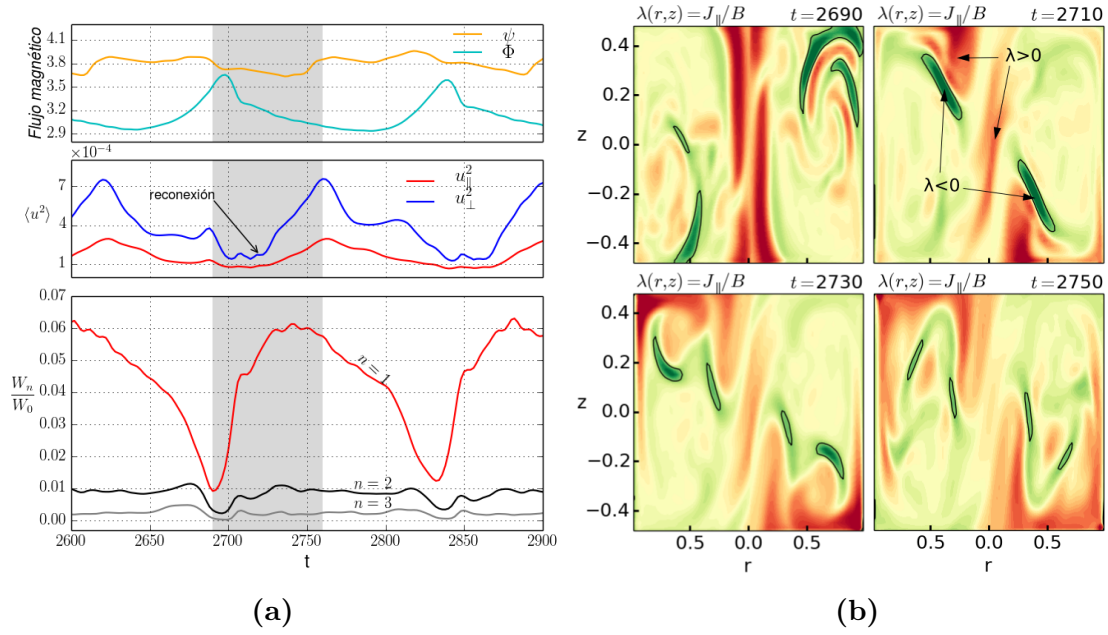


**Figura 6.6:** Evolución del dínamo magnético paralelo a  $\mathbf{B}^{n=0}$ . Se muestra la aparición y propagación de las fluctuaciones, desde un mínimo  $W_1/W_0$  hasta un máximo en  $t \approx 2750$  indicado en la figura 6.7.

magnética relativa de los modos  $n = 1, 2$  y  $3$ , y en (b) gráficos  $2D$  en el plano  $(r, z)$  de  $\lambda (= J_{||}/B)$  en cuatro instantes de tiempo en que podemos observar la evolución del kink en la columna y la reconexión magnética. En la figura 6.7 (a) vemos que el decaimiento del flujo toroidal se produce inmediatamente después de que el modo  $n = 1$  comienza a crecer y se traduce en un apreciable crecimiento de la corriente toroidal (flujo poloidal) a tiempo posterior ( $t = 2740$ ), cuando se alcanza un dínamo positivo en el eje magnético (ver fig. 6.6). El decaimiento en el flujo toroidal sugiere que la corriente en la columna magnética disminuye, en un principio esto es semejante a lo que ocurre en la figura 5.15, donde se produce un desplazamiento helicoidal de la columna magnética que luego interactúa con la región de superficies toroidales. Este comportamiento también puede observarse en las figuras mostradas en 6.7 (b) a tiempos  $t = 2690$  y  $2710$ , donde la primera de estas dos muestra que inicialmente la corriente es axisimétrica en la columna, y un instante después se vuelve asimétrica debido al crecimiento de los modos.

El proceso de reconexión da lugar al incremento de la energía cinética en  $t \approx 2720$ , cuando la velocidad perpendicular crece rápidamente (ver figura 6.7 (a)). Este comportamiento se observa también en el gráfico de las superficies de  $\lambda$ , haciéndose distinguishible la división en dos zonas con  $\lambda < 0$  que se aceleran en sentido opuesto. Este comportamiento estaría indicando el momento y lugar de la reconexión magnética, que produce un intercambio de energía que incrementa la velocidad perpendicular  $\mathbf{u}_{\perp}$ . Es decir, la dinámica en esta región pasa de ser principalmente difusiva ( $\mathbf{E} \approx \eta \mathbf{J}$ ) [68] a cinética ( $\mathbf{E} \approx -\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ ).

Se debe mencionar que las figuras 6.7 (b) solo interesan para observar la dinámica y la presencia de regiones con  $\lambda > 0$  y  $< 0$ . Estas figuras muestran a  $\lambda$  normalizado para poder lograr buen contraste a diferentes tiempos. Las zonas con  $\lambda$  nulo son regiones



**Figura 6.7:** (a) Evolución temporal de los flujos magnéticos, promedio espacial de las componentes paralela y perpendicular a  $\mathbf{B}$  del campo de velocidad al cuadrado (o energía cinética sobre densidad  $\langle 2E_k \rangle / \rho$ ), y energía magnética relativa de los modos  $n = 1, 2$  y  $3$ . La región sombreada es el intervalo de tiempo mostrado en la figura 6.6. (b)  $\lambda(r, z)$  normalizado, donde las superficies en rojo y verde indican zonas con  $\lambda > 0$  y  $\lambda < 0$  respectivamente, y el contorno negro  $\lambda = 0$ .

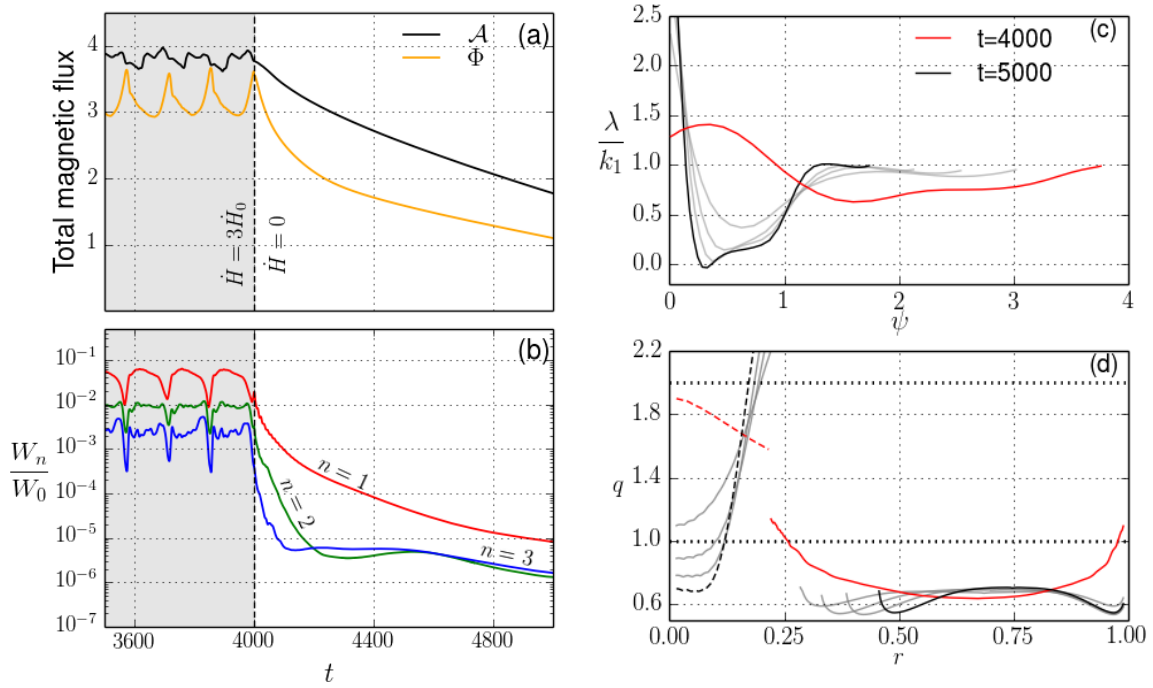
donde se originan elevados gradientes de  $\mathbf{J}$  debido al desplazamiento del campo de regiones con elevado gradiente de  $\mathbf{B}$ , hasta que efectivamente se reconecta en  $t \approx 2730$ .

## 6.5. Decaimiento resistivo

Una vez alcanzado el máximo valor medio de helicidad de la configuración, detuvimos la inyección de helicidad para estudiar el decaimiento resistivo. Para ello, tomamos la corrida con  $\dot{H} = 3\dot{H}_0$  de la figura 6.2 y llevamos a cero el campo de velocidades en los electrodos para que  $\dot{H}_{rot} = 0$  (ver ecuación (6.16)).

En la figura 6.8 (a) y (b) mostramos la amplificación de flujo magnético ( $\mathcal{A}$ ), el flujo total del campo magnético toroidal ( $\Phi$ ) y la energía magnética relativa de los modos con  $n = 1, 2$  y  $3$  en la etapa de decaimiento resistivo ( $t > 4000$ ). La corriente entre los electrodos disminuye como resultado de llevar a cero el campo de velocidades  $u_\phi(r) = 0$  (ver ecuación 6.17). Esto se refleja en el decaimiento del flujo magnético toroidal, que es función de la corriente normal  $I_z$  que atraviesa los electrodos. La reducción de esta corriente conduce al decaimiento de las fluctuaciones y la reducción del dínamo magnético que sostiene la corriente toroidal. Esto se evidencia en el comportamiento del flujo poloidal (o amplificación de flujo), que decae con el tiempo.

Al suprimir la inyección de helicidad, la corriente en los electrodos decae a una tasa mayor que la corriente en la región toroidal, quedando prácticamente solo el campo  $B_z$  en equilibrio con la configuración toroidal. Esto se puede observar en la figura 6.8 (a), que muestra que la tasa inicial de decaimiento del flujo toroidal es significativamente mayor que la del flujo poloidal ( $\mathcal{A}$ ). Por otro lado, el decaimiento general es acompañado por una redistribución de la densidad de corriente en la región con  $\psi < 1$ , que resulta en

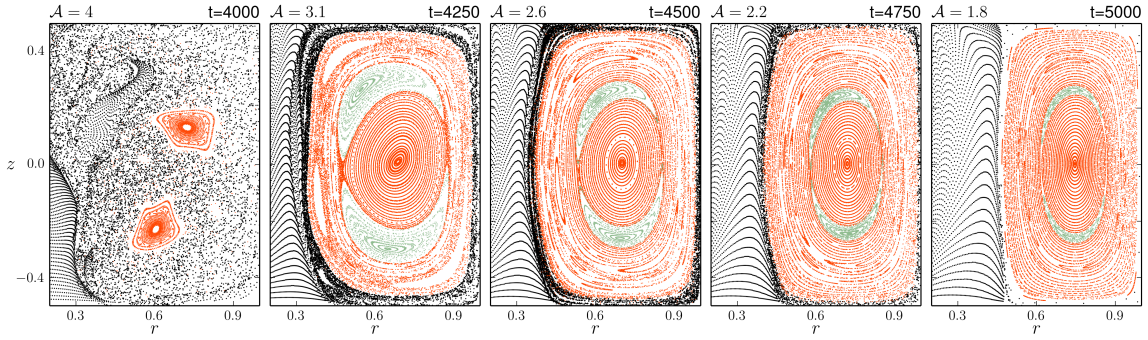


**Figura 6.8:** Decaimiento resistivo: a  $t = 4000$ , luego de la formación y sostenimiento con inyección de helicidad  $\dot{H} = 3\dot{H}_0$ , se detiene la inyección. En (a) los flujos magnéticos poloidal (o amplificación de flujos  $\mathcal{A}$ ) y toroidal  $\Phi$ , en (b) la energía magnética relativa de los modos  $n = 1, 2$  y  $3$ , en (c) los perfiles de  $\lambda(\psi)$ , y en (d) los perfiles de  $q$ .

un crecimiento de  $J_z$  y  $J_\phi$  (o  $\lambda$ ) en una región muy acotada alrededor del eje de simetría  $r = 0$  (ver fig. 6.8 (c)). Esta redistribución de la densidad de corriente se explica por la presencia de un campo de velocidad con componente  $u_\phi$  en la columna magnética al momento de detener la inyección de helicidad que arrastra las líneas de campo magnético. Este campo de velocidad se induce por la presencia de una componente  $\mathbf{J}_\perp$  debido a discontinuidad de  $\lambda$  en una región alrededor de  $\psi = 1$  y  $r_e$ . Esto se explica fácilmente al utilizar el concepto de cantidad de superficie en equilibrios MHD con la aproximación  $\beta = 0$ , donde  $\lambda$  es una cantidad que es función de  $\psi$  ( $\lambda(\psi)$ ). Si en la descripción MHD resistiva esto no se satisface, existirá una componente  $\mathbf{J}_\perp$  que actúa sobre el campo de velocidades por medio de una fuerza de Lorentz ( $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ ). Esto se evidencia en el momento de la disipación de los modos no axisimétricos al no satisfacer la condición  $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\lambda = 0$  en  $\psi = 1$  que se obtendría en equilibrios ideales. El efecto de la reducción de la corriente total que atraviesa los electrodos y la redistribución de su densidad se manifiesta también en el perfil de  $q$  de la figura 6.8 (d). Al decaer la corriente entre electrodos, los valores de  $q$  en la región toroidal bajan y se asemejan a los obtenidos en spheromaks en ausencia corrientes externas. En cambio,  $q_c$  en la separatriz sube producto de la disminución de la corriente total en la columna, y bajan los valores cercanos a  $r = 0$  debido a la redistribución en la densidad de corriente.

La 6.8 (b) muestra que apenas se interrumpe el forzado, la energía contenida en los modos inestables comienza a decaer, siendo más rápido el decaimiento de los modos con mayor  $n$ . En la figura 6.9, se muestran los mapas de Poincaré a distintos tiempos para la etapa de decaimiento resistivo. Los puntos negros corresponden a la intersección de un conjunto de líneas magnéticas integradas desde el electrodo inferior, donde

las semillas se distribuyen uniformemente en toda su superficie. Los rojos, a la zona cerrada a la que no llegan las líneas provenientes de los electrodos, y los verdes a los generados por el campo de las islas magnéticas. En el instante en que se detiene la inyección de helicidad ( $t = 4000$ ), las fluctuaciones no permiten la formación de una estructura magnética regular con superficies cerradas. Se observa que si bien las fluctuaciones MHD distribuyen de manera efectiva la energía a todo el volumen, generan una estructura magnética caótica que resulta incompatible con un buen confinamiento. Por otro lado, a tiempos posteriores el decaimiento de las fluctuaciones de menor escala permite la formación de superficies magnéticas cerradas con estructura regular.



**Figura 6.9:** Mapas de Poincaré de la configuración magnética durante el decaimiento resistivo de la figura 6.8. Los puntos negros corresponden a las líneas provenientes del campo magnético externo, en rojo a las de la estructura toroidal cerrada, y los verdes a las pertenecientes a islas magnéticas.

## 6.6. Conclusión

Se demostró la posibilidad de formar y sostener configuraciones tipo ST-PCC con  $f = 1$  y elongación  $e = 1$  mediante inyección de helicidad. El mecanismo de inyección utilizado requiere un campo magnético normal (ya usado en los capítulos anteriores), y una componente tangencial de la velocidad sobre la superficie de los electrodos ( $\mathbf{u} \times \hat{n} \neq 0$ ).

Para la etapa de sostenimiento, se realizaron simulaciones con factor de amplificación entre  $\mathcal{A} \approx 2$  y 4. En estas condiciones, las cantidades relevantes (flujos, energías de los modos inestables, etc.) presentan un comportamiento oscilatorio, dominado principalmente por la dinámica de la columna magnética. Las oscilaciones del flujo toroidal debidas al kink y la reconexión magnética producen la transformación de flujos y la distribución de la energía de la columna hacia el resto del volumen. Debido a esta dinámica, no se logran establecer superficies magnéticas cerradas porque la disipación de los modos es más lenta que el crecimiento de las inestabilidades. Pese a que la inyección de helicidad se mantiene constante en el tiempo, la corriente toroidal no resulta estacionaria y la corriente entre electrodos sufre procesos de decaimiento y recuperación abrupta debido al kink de la columna.

El análisis de las inestabilidades presentes durante la etapa de sostenimiento muestra que poseen un comportamiento similar al descrito en el capítulo 5, donde en esos casos el kink interno de la configuración toroidal no se manifestó en configuraciones con

perfiles de  $\lambda$  uniforme en el toroide. Los perfiles de  $\lambda$  alcanzados durante el sostenimiento son semejantes a los usados en los estudios de estabilidad del capítulo anterior (tipo *tanh*) pero en la región toroidal el perfil resulta lineal con el flujo magnético cuando  $W_{n>1}/W_0$  es mínimo y  $q_t < 1$  (elevado factor de amplificación). Además, en estas situaciones encontramos que el modo con  $n = 1$  crece cuando  $q_c$  se encuentra apenas por encima de 1, y satura a los pocos tiempos de Alfvén cuando  $q_c = 1$  (correspondiente al flujo toroidal máximo de un ciclo). Este comportamiento solo se observa cuando en el toroide  $q_t < 1$ , lo que estaría indicando una contribución del toroide a la estabilidad.

Por otro lado, a través de la observación del dínamo y  $\lambda(r, z)$ , se pudo caracterizar la dinámica de la relajación magnética. Se observó que la mayor fuente de fluctuaciones se encuentra en la columna y que su interacción con la región toroidal se efectúa mediante la reconexión magnética en regiones con gradientes de  $\mathbf{B}$  elevados. Sin la presencia del kink en la columna, las fluctuaciones que puedan originarse producto de inestabilidades internas en el toroide no son capaces de sostener la corriente toroidal. Sin embargo, pueden ser importantes para favorecer la distribución de la energía.

Se demostró que luego de una etapa de sostenimiento, deteniendo la inyección de helicidad es posible lograr una configuración magnética regular con superficies magnéticas cerradas. Una situación de decaimiento resistivo permite la disipación de los modos inestables debido a la disminución de la corriente en los electrodos. Los estados alcanzados en esta etapa presentan una configuración magnética similar a un spheromak sin campo externo. Sin embargo, el decaimiento de la corriente toroidal podría evitarse empleando métodos alternativos (haces neutros o radio frecuencia) para lograr el sostenimiento, mientras se mantiene de manera controlada la corriente entre electrodos. La implementación de estos métodos podría permitir recuperar las configuraciones magnéticas (perfiles de  $q$ ) logrados con el método de inyección de helicidad, solo que dentro de los límites de estabilidad y libre de fluctuaciones.





# Conclusión General

A lo largo de esta tesis se han realizado estudios relacionados con configuraciones magnéticas toroidales similares a los tokamaks esféricos. En estos estudios se utilizó el modelo MHD en la aproximación de  $\beta = 0$  y se consideraron conservadores de flujo cilíndricos en los que se reemplazaron la columna de retorno de la corriente poloidal y el primario del transformador por una columna de plasma y electrodos coaxiales. A continuación se resumen las conclusiones alcanzadas en cada capítulo y se intenta brindar una perspectiva general a futuro para continuar con el desarrollo de los modelos, generar equilibrios más avanzados e incluir otros efectos físicos (p/ej. presión finita) que pueden modificar los equilibrios y la estabilidad de las configuraciones magnéticas.

En el capítulo 4 se calcularon equilibrios MHD ideales de configuraciones magnéticas del tipo CG, ST-PCC-CG y ST-PCC (ver figs. 4.2 y 4.3) en conservadores de flujo cilíndricos de elongación  $e = 1$  y se analizaron los resultados en función de la relación de flujos externos y la distribución de corriente a través de los parámetros  $f$  y  $\lambda(\psi)$ . Se mostró el comportamiento asintótico de la configuración cuando  $\lambda \rightarrow k_1$ , es decir, cuando se aproxima a configuraciones magnéticas aisladas. Esto probó que un equilibrio con valores de  $\lambda$  alejados del autovalor permite optimizar la contribución de los campos magnéticos externos y la distribución de corriente del equilibrio. Es decir, si se logra controlar estos dos parámetros se podrán manipular más fácilmente las configuraciones magnéticas. Finalmente, utilizando perfiles de  $\lambda$  con dependencia  $\tanh$ , se obtuvieron perfiles de  $q$  semejantes a los de un tokamak (monótono crecientes desde el eje magnético) en configuraciones del tipo ST-PCC ( $f = 1$ ) con amplificación de flujo  $\mathcal{A} = 2.5$ .

En el capítulo 5 se analizó la estabilidad de los equilibrios calculados en el capítulo 4 y se utilizaron los métodos numéricos presentados en el apéndice A, para resolver las ecuaciones MHD resistivas (ver capítulo 2) y estudiar la evolución temporal de equilibrios perturbados con modos inestables. Inicialmente se estudió la inestabilidad de tilt, que se presenta en configuraciones magnéticas de elevada elongación y se concluyó que los límites de estabilidad quedan definidos por la relación de flujos magnéticos externos ( $f$ ) y la amplificación de flujo ( $\mathcal{A}$ ). Se encontraron diferencias en los umbrales de estabilidad al comparar los resultados del modelo dinámico con el analítico, concluyendo que se debe a que en el modelo dinámico contribuye con el efecto estabilizador de los campos magnéticos externos fijos en la superficie de los electrodos (“line-tying”). Se presentaron mapas de estabilidad y se indicaron las diferencias obtenidas entre ambos modelos. Luego, se utilizaron equilibrios con elongación  $e = 1$  y  $f = 1$ , para garantizar la estabilidad respecto del tilt, y se estudiaron la relajación magnética y el origen de la inestabilidad de corriente (o kink) de la columna central de plasma (PCC) y de la configuración toroidal. Se utilizaron equilibrios con una distribución de corriente del

tipo *tanh* para obtener una elevada densidad de corriente en la columna magnética. Se presentaron los mapas de estabilidad y se observaron diferentes comportamientos durante la evolución no lineal, dependiendo de que la relajación fuera total o parcial.

En el capítulo 6, resolviendo las ecuaciones MHD resistivas, se estudió la formación y el sostenimiento de configuraciones magnéticas toroidales ST-PCC mediante la inyección de helicidad magnética. Para ello, se utilizaron campos de velocidad contrarotantes en las superficies de los electrodos. Se analizaron los regímenes de sostenimiento utilizando el análisis de estabilidad de la corriente del capítulo 5. Se observó una buena correlación con el criterio de Kruskal-Shafranov para la estabilidad de la columna central cuando  $q_t > 1$  y un leve corrimiento de este límite ( $q_c = 1 + \delta_q$ , con  $\delta_q \ll 1$ ) cuando la configuración magnética presenta una región con  $q_t < 1$ . Se mostró que los modos más influyentes sobre la dinámica de la configuración son los que provienen de la columna magnética, ya que son los que sostienen la corriente toroidal al producir un campo eléctrico debido al efecto dínamo. La amplitud de los modos presenta oscilaciones periódicas, con intervalos de crecimiento abrupto en los que se produce el mayor flujo de energía. Dicho flujo se incrementa, además, debido a los procesos de reconexión magnética. Finalmente, se observó la formación de estructuras magnéticas cerradas, apropiadas para el confinamiento magnético. Esto se logró debido a la disipación de modos no axisimétricos que se produce cuando se detiene la inyección de helicidad en un instante de la etapa de sostenimiento. Esto inicia una fase de decaimiento resistivo. Si bien los resultados son muy interesantes debido a la presencia de grandes regiones con superficies magnéticas cerradas, como la corriente en los electrodos disminuye a tasas mayores que la corriente en el toroide, se obtienen configuraciones magnéticas con “reverse shear” y bajo  $q_t$ , lejos de las configuraciones magnéticas de relevancia para ST-PCC. Como solución a futuro, para lograr de manera controlada perfiles de  $q$  tipo tokamak en el decaimiento resistivo, se pueden aplicar métodos de control para no permitir un decaimiento considerable de la corriente entre electrodos (relativo a la corriente toroidal) e implementar mejoras en el modelo MHD (condiciones de borde,  $\beta > 0$ , etc).

Si bien se han podido obtener equilibrios con perfiles de  $q$  monótono crecientes desde el eje magnético en una configuración ST-PCC, para lograr valores más elevados en la separatriz, como los alcanzados en un ST o tokamak, se requeriría de una densidad de corriente  $J_z$  más elevada en la columna magnética. Esto incrementaría de manera importante la componente toroidal de campo magnético en la separatriz, y por ende el valor de  $q$  en esta región. Aunque puede resultar trivial calcular un equilibrio MHD con estas características, sería imposible simular su formación y sostenimiento utilizando las ecuaciones MHD resistivas en la aproximación de  $\beta = 0$ , debido a la aparición del kink en la columna magnética. Sin embargo, estudios preliminares indicarían que se podría lograr una elevada densidad de corriente estable al kink en la columna magnética incluyendo gradientes de presión ( $\beta > 0$ ). Esto se conseguiría debido a la contribución de la corriente perpendicular al campo magnético, que en un equilibrio se relaciona con el gradiente de presión a través de la ecuación (1.7). Esto permitiría operar con mayor corriente eléctrica en dirección  $\hat{z}$  dentro de límites estables de corriente paralela, pero abre la posibilidad a la aparición de nuevas inestabilidades relacionadas con el gradiente de presión o corriente perpendicular. Será fundamental realizar el análisis correspondiente para encontrar los nuevos límites de estabilidad relacionados con los



gradientes de presión.

Si bien se ha avanzado significativamente en el análisis de configuraciones tipo ST-PCC aún queda mucho por hacer. En trabajos futuros se debería proceder a:

1. Eliminar la aproximación de cero  $\beta$ . Esto significa calcular equilibrios con gradientes de presión e incorporar el gradiente de presión en el código que resuelve las ecuaciones MHD resistivas. El agregado de la presión modificará los umbrales de estabilidad, pudiendo estabilizar algunos modos y desestabilizar otros.
2. Incrementar la elongación para aumentar el valor del factor de seguridad. Es necesario realizar estudios detallados del efecto del aumento de la elongación en configuraciones con presión finita.
3. Agregar los campos magnéticos externos generados por bobinas para modificar la separatriz. Si bien en la PROTO-SPHERA[11] se utiliza un recipiente cilíndrico, la superficie externa del plasma (separatriz) dista mucho de ser un cilindro. La forma de la separatriz queda determinada por las espiras de campo poloidal ubicadas dentro del cilindro y los electrodos anulares en ambos extremos. Es bien sabido que la estabilidad del plasma depende de la forma de la sección transversal por lo que sería de gran interés incorporar una geometría lo más realista posible en los cálculos de equilibrio y estabilidad.
4. Utilizar una resistividad ( $\eta$ ) más elevada en la superficie de los electrodos. Esto facilitaría la utilización de métodos de inyección de helicidad a través de corrientes en la superficie, tal como se describe en la ecuación (6.11). Para una buena implementación del método se debe permitir la variación temporal del campo magnético en la región donde  $\mathbf{J} \times \hat{n} \neq 0$ , o bien, eliminar la condición de no deslizamiento ( $\mathbf{u} \times \hat{n} = 0$ ) en el electrodo, para más detalles ver sección 6.2.



# Apéndice A

## Solución numérica a las ecuaciones MHD<sup>1</sup>

Las ecuaciones del modelo MHD son altamente no lineales. La parte ideal del modelo concentra todos los términos no lineales y como carece de disipación, puede expresarse como un sistema de leyes de conservación hiperbólica. En este apéndice describimos un método numérico adecuado para tratar leyes de conservación hiperbólicas no lineales. Este método se basa en la linealización localizada de las ecuaciones y en la solución exacta del problema linealizado. Finalmente, introducimos los términos disipativos (que son lineales y no traen dificultades) del modelo MHD resistivo, con un método de paso fraccionado. También se describe una estrategia para mantener la divergencia del campo magnético cercana a cero, en la aproximación numérica.

### A.1. Forma conservativa de las ecuaciones MHD ideal

Una ley de conservación expresa el cambio temporal de una cantidad en términos de la divergencia del flujo de esa cantidad. Las ecuaciones MHD ideal ( $\nu$  y  $\eta$  igual a cero) expresan la conservación de la masa (2.2), el momento cinético (2.5), el flujo magnético (2.7) y la energía total (2.8). Estas cantidades pueden expresarse como un vector de variables conservadas,

$$Q = (\rho, \rho u_x, \rho u_y, \rho u_z, B_x, B_y, B_z, w)^T. \quad (\text{A.1})$$

donde  $w$  es la energía total, dada por (2.9). En términos del vector de variables conservadas  $\mathbf{U}$ , las ecuaciones MHD ideal pueden expresarse en forma de ley de conservación como [69, 70],

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{F})^T = 0, \quad (\text{A.2})$$

---

<sup>1</sup>Por razones de completitud con la tesis y por equivalencia en los métodos numéricos numéricos empleados. Se incorpora este apéndice extraído del capítulo 3 de la tesis de Pablo L. García Martínez [3].

donde  $\mathbf{F}$  es la función (tensorial) de flujos,

$$\mathbf{F}(Q) = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + (p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2}) \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B} \\ \mathbf{u} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{u} (w + p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \end{pmatrix}^T. \quad (\text{A.3})$$

Nótese que en las expresiones anteriores  $B^2$  tiene unidades de presión. Esto se debe a que reescaleamos el campo magnético con  $\sqrt{\mu_0}$ , para eliminar  $\mu_0$  de las ecuaciones.

La ec. (A.2) es la expresión matemática de un sistema de leyes de conservación en general. La información de la física que se está estudiando queda contenida en la función de flujos  $\mathbf{F}$ .

### Problema unidimensional

Veremos que las ecs. (A.2) y (A.3) describen fenómenos de propagación de ondas y que es posible obtener información valiosa (en particular, útil a la hora de diseñar métodos numéricos), a partir de la estructura de autovectores de la matriz jacobiana de la función de flujos, que se define a continuación. Comenzamos el análisis restringiendo el estudio al caso unidimensional en que todas las cantidades sólo varían en la dirección  $x$ . En ese caso, las ecs. MHD ideal pueden escribirse como,

$$q_t + f(q)_x = 0, \quad (\text{A.4})$$

donde se utilizaron los subíndices para denotar las derivadas parciales y el vector de cantidades conservadas es, en este caso,

$$q = (\rho, \rho u_x, \rho u_y, \rho u_z, B_y, B_z, w)^T, \quad (\text{A.5})$$

y el vector que define el flujo de  $q$  en la dirección  $x$  es,

$$f = \begin{pmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x^2 + p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2} - B_x^2 \\ \rho u_x u_y - B_x B_y \\ \rho u_x u_z - B_x B_z \\ B_y u_x - B_x u_y \\ B_z u_x - B_x u_z \\ (w + p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2}) u_x - (u_x B_x + u_y B_y + u_z B_z) B_x \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

La omisión de  $B_x$  en el vector de variables conservadas se debe a que el flujo de  $B_x$  en la dirección  $x$  es cero, de modo que  $B_x(x)$  no cambiará durante la evolución. Esto proviene de la ecuación de inducción (2.7), en particular, del término  $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u})$ . Por otro lado, la restricción  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , exige, para el caso unidimensional, que  $B_x(x) = \text{constante}$ . Entonces, si esta restricción se cumple en la condición inicial, se mantendrá durante toda la evolución. En ese sentido se dice que la ec. de inducción es compatible con la restricción  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ .

En zonas donde el flujo es suave, puede aplicarse la regla de la cadena sobre (A.4)

para obtener,

$$q_t + f'(q)q_x = 0, \quad (\text{A.7})$$

donde  $f'(q)$  es la matriz jacobiana del sistema, que resulta ser [71],

$$f'(q) = \begin{pmatrix} u_x & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_x & 0 & 0 & B_y/\rho & B_z/\rho & 1/\rho \\ 0 & 0 & u_x & 0 & -B_x/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_x & 0 & -B_x/\rho & 0 \\ 0 & B_y & -B_x & 0 & u_x & 0 & 0 \\ 0 & B_y & 0 & -B_x & 0 & u_x & 0 \\ 0 & \rho c_s^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_x \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

donde  $c_s$  es la velocidad del sonido,  $c_s^2 = (\partial p / \partial \rho)_s$ . Si la matriz jacobiana es diagonalizable en el campo real, se dice que el sistema de leyes de conservación es hiperbólico. Las ecuaciones MHD ideal constituyen un sistema hiperbólico [71].

El método que utilizaremos para obtener aproximaciones numéricas de las soluciones de las ecuaciones MHD se basa en la linealización localizada de la ec. no-lineal (A.7). Por ello repasamos a continuación las propiedades matemáticas de los sistemas hiperbólicos lineales.

## A.2. Sistemas hiperbólicos lineales

Consideremos el sistema lineal de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales,

$$q_t + Aq_x = 0 \quad \text{en } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (\text{A.9})$$

donde  $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^m$  es el vector de funciones incógnita, compuesto por  $m$  componentes, y  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es una matriz de coeficientes constantes. Este sistema es *hiperbólico* si  $A$  es diagonalizable en el campo real. En ese caso podemos reescribir a  $A$  como,

$$A = R\Lambda R^{-1}, \quad (\text{A.10})$$

donde  $R$  es la matriz cuyas columnas son los autovectores de  $A$ . En particular, si los autovalores de  $A$  además de reales son distintos dos a dos, se dice que el sistema es *estrictamente hiperbólico*.

A partir de (A.10) podemos definir un nuevo vector de incógnitas  $w$ , de la siguiente forma,

$$w = R^{-1}q. \quad (\text{A.11})$$

Usando estas variables, podemos reducir el sistema (A.9) a

$$w_t + \Lambda w_x = 0, \quad (\text{A.12})$$

que es un conjunto de  $m$  ecuaciones desacopladas, de la forma

$$w_t^p + \lambda^p w_x^p = 0, \quad p = 1, \dots, m, \quad (\text{A.13})$$

que describen el transporte de las cantidades  $w^p$  a lo largo del eje  $x$ .

Si los coeficientes de  $A$  varían con la posición o el tiempo, el sistema (A.9) sigue siendo lineal, pero  $R$  y  $\Lambda$  dependerán en general de  $x$  y  $t$ , haciendo que el procedimiento utilizado para obtener (A.12) sea válido sólo en forma local.

### Solución del problema de Cauchy

Consideremos el problema de Cauchy para el sistema (A.9), para el cual contamos con la condición inicial,

$$q(x, 0) = q_0(x). \quad (\text{A.14})$$

A partir de esta información podemos obtener la condición inicial para el sistema (A.12) mediante la transformación

$$w_0(x) = R^{-1}q_0(x). \quad (\text{A.15})$$

La solución de la ec. (A.13) con condición inicial (A.15) es

$$w^p(x, t) = w^p(x - \lambda^p t, 0) = w_0^p(x - \lambda^p t). \quad (\text{A.16})$$

Esto quiere decir que cada una de las componentes  $w_0^p = w^p(x, 0)$  de la condición inicial  $w_0(x)$  es propagada con velocidad constante  $\lambda^p$ , a lo largo de la coordenada  $x$ .

Con la solución dada por la ec. (A.16) podemos construir el vector de soluciones  $w(x, t)$ , y luego transformar a la variable original  $q$  mediante,

$$q(x, t) = R w(x, t), \quad (\text{A.17})$$

que nos da la solución del problema (A.14).

Nótese que la solución (A.17) puede ser escrita como una combinación lineal de los autovectores  $r^p$  (con  $p = 1, \dots, m$ ) de la matriz  $A$ , es decir

$$q(x, t) = \sum_{p=1}^m w^p(x, t) r^p. \quad (\text{A.18})$$

Esto indica que el vector  $q(x, t)$  puede interpretarse como la superposición de  $m$  ondas que se propagan a velocidades  $\lambda^p$ . Los escalares  $w^p(x, t)$ , para  $p = 1, \dots, m$ , dan los coeficientes de cada autovector y pueden ser pensados como la *intensidad* de cada una de las ondas. El contenido de información de cada onda está dada por los autovectores  $r^p$ . Las condiciones de hiperbolicidad aseguran que los  $m$  autovectores son linealmente independientes y entonces cada vector  $q$  tiene una representación única del tipo (A.18).

### Características

La ec. (A.16) nos indica que cada uno de los coeficientes  $w_0^p(x)$  de la descomposición (A.15) de la condición inicial  $q_0(x)$  es simplemente propagado a velocidad constante  $\lambda^p$  a medida que transcurre el tiempo. Esto quiere decir que  $w^p(x, t) \equiv w_0^p(x_0)$  a lo largo de la curva  $X(t) = x_0 + \lambda^p t$ . Estas curvas se denominan “características de la familia  $p$ ”, o bien “ $p$ -características”, y son líneas rectas en el espacio  $x$ - $t$  cuando la matriz  $A$  está compuesta por coeficientes constantes. Para un sistema estrictamente hiperbólico,

pasan por cada punto del plano  $x-t$ ,  $m$  curvas características distintas.

El coeficiente  $w^p(x, t)$  correspondiente al autovector  $r^p$  en la expansión (A.18) de  $q(x, t)$ , es constante a lo largo de las  $p$ -características. Las funciones  $w^p(x, t)$  se conocen como “variables características”.

### Ondas simples

La solución del problema de Cauchy,  $q(x, t)$  puede ser interpretada como el resultado de la superposición de  $m$  ondas que se propagan independientemente sin cambiar su forma. La onda número  $p$  tiene forma  $w_0^p(x)r^p$  y se propaga con velocidad  $\lambda^p$ .

Un caso particular de esta solución se produce cuando  $w^p(x, 0)$  es constante en  $x$  para todos los valores de  $p$  menos uno, es decir  $w_0^p(x) \equiv \bar{w}^p$  para  $p \neq i$ . En ese caso, la solución tiene la forma

$$\begin{aligned} q(x, t) &= w_0^i(x - \lambda^i t)r^i + \sum_{p \neq i} \bar{w}^p r^p, \\ &= q_0(x - \lambda^i t). \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Esto implica que la condición inicial simplemente se propaga con velocidad  $\lambda^i$ . Como  $m - 1$  variables características son constantes, la ecuación se reduce a  $q_t + \lambda^i q_x = 0$ , que rige el comportamiento de la familia  $i$ .

Los sistemas de ecuaciones no lineales tienen soluciones análogas que se denominan “ondas simples” (*simple waves*), como por ejemplo el caso de las ondas de choque en flujo hidrodinámico (HD) compresible.

### Dominio de dependencia y región de influencia

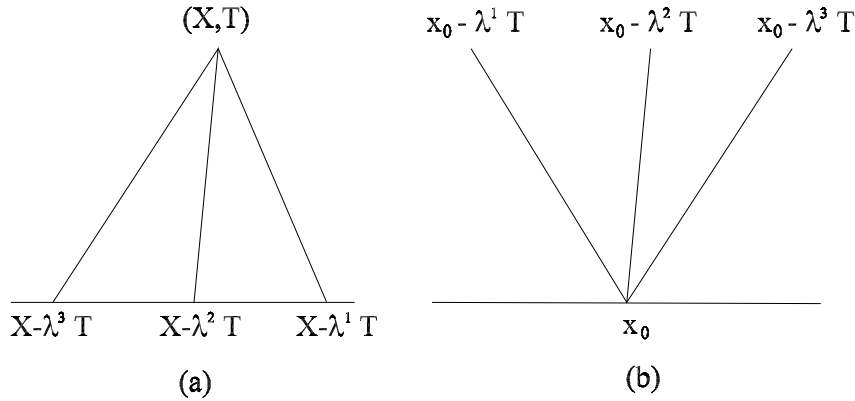
Sea  $(X, T)$  algún punto en el espacio-tiempo (el plano  $x-t$ ). La solución  $q$  del problema en  $(X, T)$  depende del valor de la condición inicial  $q_0(x)$  sólo en  $m$  puntos. Estos puntos de la condición inicial son aquellos por los cuales pasa una característica, que también pasa por  $(X, T)$  [Fig.A.1 (a)]. El conjunto formado por estos puntos,

$$\mathcal{D}(X, T) = \{X - \lambda^p T : p = 1, 2, \dots, m\}, \quad (\text{A.20})$$

se llama “dominio de dependencia” del punto  $(X, T)$ . Los valores de la condición inicial en puntos que no pertenecen a este conjunto no tienen ninguna influencia sobre el valor de  $q$  en  $(X, T)$ .

En lugar de observar qué parte de la condición inicial afecta un punto  $(X, T)$  del plano  $x-t$ , podemos preguntarnos qué influencia tiene la información  $q_0(x_0)$  del punto  $x_0$  a tiempo  $t = 0$ , en la solución  $q(x, t)$ . Evidentemente, la información de este punto afecta a la solución a lo largo de las  $m$  características que salen de él, dadas por  $x_0 + \lambda^p t$  para  $p = 1, \dots, m$ . El conjunto definido por estos puntos se denomina “región de influencia” del punto  $x_0$  [Fig.A.1 (b)].

Para ecuaciones hiperbólicas en general, tanto el dominio de dependencia como la región de influencia son conjuntos acotados, aunque en problemas no lineales, la solución puede depender de todo un intervalo, en lugar de un número finito de puntos.



**Figura A.1:** Dominio de dependencia del punto  $(X, T)$  (a) y región de influencia del punto  $x_0$  (b), para un sistema hiperbólico de tres ecuaciones, con  $\lambda^1 < 0 < \lambda^2 < \lambda^3$ .

El hecho de que estos conjuntos sean acotados se debe al carácter hiperbólico, que hace que la información se propague a velocidad finita. Esto tiene importantes implicaciones en el diseño de métodos numéricos apropiados. En particular, la propagación de la información a velocidad finita hace que los métodos de cálculo explícitos constituyan una herramienta eficiente.

### A.2.1. El problema de Riemann para sistemas lineales

A pesar de que las soluciones clásicas de las ecuaciones diferenciales deben ser funciones suaves (suficientemente diferenciables), la solución (A.18) puede ser utilizada aun en el caso en que la condición inicial no sea suave, e incluso si esta es una función discontinua.

El problema de Riemann se caracteriza por una condición inicial constante a trozos, con una sola discontinuidad,

$$q_0(x) = \begin{cases} q_l & \text{si } x < 0, \\ q_r & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

Esta discontinuidad produce una o más discontinuidades en las variables características, con lo cual esperamos que esas discontinuidades se propaguen a lo largo de su característica correspondiente.

Consideremos el caso escalar, en que la matriz  $A$  es de  $1 \times 1$ . En ese caso existe un único autovalor  $\lambda^1$ , y su autovector asociado puede elegirse  $r^1 = 1$ . La solución del problema de Riemann consiste en la discontinuidad  $q_r - q_l$  propagándose a velocidad  $\lambda^1$ , a lo largo de la característica. Esta solución puede escribirse como  $q(x, t) = q_0(x - \lambda^1 t)$ .

Podemos usar este resultado para obtener la solución del caso general de un sistema lineal de  $m \times m$ . La estructura de esta solución es similar a la del problema de Riemann para el caso no lineal, y servirá como herramienta para desarrollar los métodos numéricos que emplearemos en esta Tesis.



Para obtener la solución del problema de Riemann comenzamos descomponiendo los estados  $q_l$  y  $q_r$ , de la siguiente forma,

$$q_l = \sum_{p=1}^m w_l^p r^p \quad q_r = \sum_{p=1}^m w_r^p r^p. \quad (\text{A.22})$$

Entonces, la ecuación de onda número  $p$  tiene valor inicial,

$$w_0^p(x) = \begin{cases} w_l^p & \text{si } x < 0, \\ w_r^p & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

y esta discontinuidad simplemente se propaga a velocidad  $\lambda^p$ , con lo cual,

$$w^p(x) = \begin{cases} w_l^p & \text{si } x - \lambda^p t < 0, \\ w_r^p & \text{si } x - \lambda^p t > 0. \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

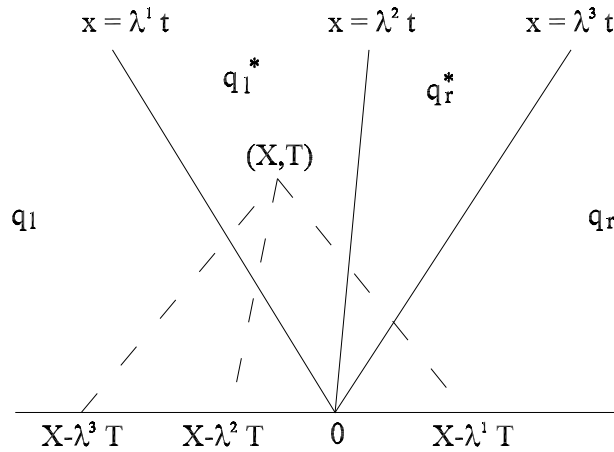
Sea  $P(x, t)$  el máximo valor de  $p$  para el cual  $x - \lambda^p t > 0$ , entonces

$$q(x, t) = \sum_{p=1}^{P(x,t)} w_r^p r^p + \sum_{p=P(x,t)+1}^m w_l^p r^p, \quad (\text{A.25})$$

que puede ser reescrito en forma más concisa, como

$$q(x, t) = \sum_{p: \lambda^p < x/t} w_r^p r^p + \sum_{p: \lambda^p > x/t} w_l^p r^p. \quad (\text{A.26})$$

La determinación de  $q(x, t)$  en un dado punto  $(X, T)$  se muestra en la Fig. A.2. En



**Figura A.2:** Construcción de la solución del problema de Riemann en  $(X, T)$ . Trazamos las características que llegan a este punto para determinar el valor de  $w^p$ . El valor de  $q$  es constante en cada región del plano  $x$ - $t$ . El salto a través de cada discontinuidad en la solución es un autovector de  $A$ .

el caso mostrado,  $w^1 = w_r^1$  mientras que  $w^2 = w_l^2$  y  $w^3 = w_l^3$ . Entonces la solución en

el punto ilustrado es

$$q(X, T) = w_r^1 r^1 + w_l^2 r^2 + w_l^3 r^3. \quad (\text{A.27})$$

Nótese que la solución es la misma en toda la región del plano  $x-t$  delimitada por las características definidas por  $x = \lambda^1 t$  y  $x = \lambda^2 t$ . Cuando cruzamos la característica  $p$ , el valor  $x - \lambda^p t$  pasa por cero, haciendo que el valor de  $w^p$  cambie de  $w_l^p$  a  $w_r^p$ , mientras los demás coeficientes  $w^i$  ( $i \neq p$ ) permanecen constantes.

Entonces la solución es constante en cada una de las zonas delimitadas por las características (como lo muestra la Fig. A.2). Al cruzar la característica  $p$  la solución cambia en  $q$  un valor

$$(w_r^p - w_l^p) r^p \equiv \alpha^p r^p. \quad (\text{A.28})$$

Por lo tanto, el salto en  $q$  es un múltiplo de  $r^p$ , es decir, es un autovector de  $A$ .

En general, el salto en la condición inicial (A.21) no será un múltiplo de algún autovector de  $A$ , y la resolución del problema de Riemann puede pensarse como la descomposición del salto  $q_r - q_l$  en diferentes ondas,

$$q_r - q_l = \sum_{p=1}^m \alpha^p r^p. \quad (\text{A.29})$$

Para hallar la solución se debe resolver el sistema de ecuaciones lineales,

$$R\alpha = q_r - q_l, \quad (\text{A.30})$$

para obtener el vector  $\alpha$ , es decir  $\alpha = R^{-1}(q_r - q_l)$ .

### A.3. Propagación de ondas en MHD ideal

Un sistema no-lineal, de la forma (A.7), es hiperbólico cuando la  $f'(q)$  es diagonalizable en el campo real. Ese es el caso para las ecs. MHD ideal en una dimensión espacial [72]. Debido a que la matriz jacobiana (A.8) depende de la incógnita, no es posible resolver (A.7) en general, usando los pasos descritos en la Sec. A.2 para el caso lineal. Sin embargo, es posible aplicar la teoría de sistemas lineales al estudio de perturbaciones de baja amplitud que evolucionan sobre un estado (equilibrio) de referencia. Si consideramos pequeñas perturbaciones  $\delta q$  a un equilibrio homogéneo y estático  $q$ , y suponemos que  $f'(q + \delta q) \sim f'(q)$ , la ec. (A.7) se convierte en,

$$(\delta q)_t + f'(q)(\delta q)_x = 0, \quad (\text{A.31})$$

que determina la evolución de las perturbaciones. La ec. (A.31) es un sistema hiperbólico lineal, por lo tanto, sabemos que una pequeña perturbación inicial  $\delta q_0$  se descompone en ondas simples. Cada una de estas ondas está asociada a uno de los autovectores de la matriz jacobiana, y se propaga a la velocidad dada por el autovalor correspondiente.

Los 7 autovalores de (A.8) que determinan la velocidad de propagación de sus ondas correspondientes son [71]:

- $s_e = u$ , correspondiente a una onda de entropía;

- $s_A = u \pm c_A$ , correspondiente a un par de ondas de Alfvén;
- $s_{f,s} = u \pm c_{f,s}$ , correspondiente a dos pares de ondas magneto-acústicas.

La velocidad de Alfvén,  $c_A$  es,

$$c_A = \frac{B_x}{\sqrt{\rho}}, \quad (\text{A.32})$$

mientras que las velocidades magneto-acústica rápida ( $c_f$ ) y lenta ( $c_l$ ) están dadas por,

$$c_{f,s} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( c_s^2 + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{\rho} \pm \sqrt{\left( c_s^2 + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{\rho} \right)^2 - 4c_s^2 c_A^2} \right)}. \quad (\text{A.33})$$

Los autovectores asociados a estas ondas están definidos a menos de una constante de normalización. Una versión adecuadamente normalizada puede obtenerse definiendo previamente las cantidades [71]

$$\alpha_f^2 = \frac{c_s^2 - c_l^2}{c_f^2 - c_l^2}, \quad \alpha_s^2 = \frac{c_f^2 - c_s^2}{c_f^2 - c_l^2} \quad (\text{A.34})$$

y

$$\beta_y = \frac{B_y}{(B_y^2 + B_z^2)^{1/2}}, \quad \beta_z = \frac{B_z}{(B_y^2 + B_z^2)^{1/2}}. \quad (\text{A.35})$$

Con estas definiciones los autovectores correspondientes a cada onda son:

- Onda de entropía,  $s_e = u$ ,

$$r_e = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T, \quad (\text{A.36})$$

- Ondas de Alfvén,  $s_A = u \pm c_A$ ,

$$r_A = \left( 0, 0, -\frac{\beta_z}{\sqrt{2}}, \frac{\beta_y}{\sqrt{2}}, \pm \sqrt{\frac{\rho}{2}} \beta_z, \mp \sqrt{\frac{\rho}{2}} \beta_y, 0 \right)^T, \quad (\text{A.37})$$

- Ondas magneto-acústicas rápidas,  $s_f = u \pm c_f$ ,

$$r_f = \begin{pmatrix} \rho \alpha_f, \\ \pm \alpha_f c_f, \\ \mp \alpha_s c_l \beta_y \operatorname{sgn} B_x, \\ \mp \alpha_s c_l \beta_z \operatorname{sgn} B_x, \\ \alpha_s \sqrt{\rho} c_s \beta_y, \\ \alpha_s \sqrt{\rho} c_s \beta_z, \\ \alpha_f \rho c_s^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.38})$$

- Ondas magneto-acústicas lentas,  $s_s = u \pm c_l$ ,

$$r_s = \begin{pmatrix} \rho\alpha_s, \\ \pm\alpha_s c_l, \\ \pm\alpha_f c_f \beta_y \operatorname{sgn} B_x, \\ \pm\alpha_f c_f \beta_z \operatorname{sgn} B_x, \\ -\alpha_f \sqrt{\rho} c_s \beta_y, \\ -\alpha_f \sqrt{\rho} c_s \beta_z, \\ \alpha_s \rho c_s^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.39})$$

Estos autovectores son ortonormales y constituyen una base adecuada para la descomposición de  $\delta q$ , siempre que  $\alpha_f$ ,  $\alpha_s$ ,  $\beta_y$  y  $\beta_z$  adopten valores entre cero y uno. Una dificultad se presenta cuando  $B_y^2 + B_z^2 = 0$ , en cuyo caso  $\beta_y$  y  $\beta_z$  quedan indefinidos. Este problema se soluciona notando que  $\beta_y$  y  $\beta_z$  representan los cosenos directores de la componente de  $\mathbf{B}$  perpendicular a la dirección de propagación de la onda ( $\hat{x}$ ). En caso de que esa componente sea nula, lo único que importa es hacer una elección de modo que  $\beta_y^2 + \beta_z^2 = 1$ , por ejemplo [72],

$$\beta_y = \beta_z = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (\text{A.40})$$

Otra dificultad aparece cuando  $B_y^2 + B_z^2 = 0$  y  $B_x = \rho c_s^2$ , en cuyo caso  $\alpha_f$  y  $\alpha_s$  están indefinidos. Esta situación se denomina “punto triple”, ya que las velocidades de las tres familias de ondas magnéticas coinciden:  $c_l = c_A = c_f$ . En la práctica, en un cálculo tridimensional es muy poco probable que se verifique esta condición [70], y rara vez resulta necesario un tratamiento especial como el descrito en los trabajos específicos del tema [71].

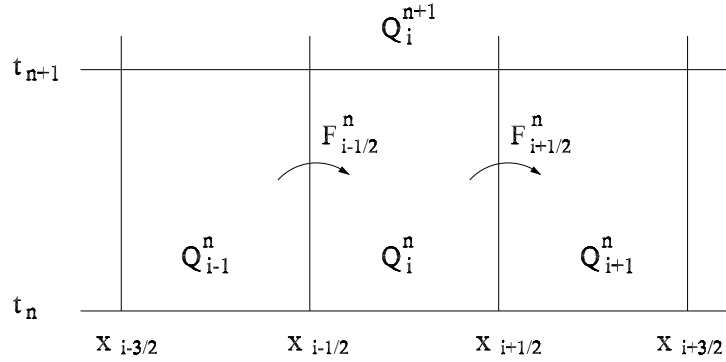
El análisis precedente nos muestra cómo es la propagación de ondas en MHD ideal en el caso linealizado. Si bien este caso puede parecer un límite poco relevante, resulta ser un elemento clave para resolver los problemas no lineales que nos interesan. La idea es linealizar adecuadamente en forma localizada (tanto espacial como temporalmente) el problema original. Si tenemos una discretización del dominio espacio-temporal, el proceso de linealización nos traducirá el problema no-lineal a una colección de tantos problemas lineales (como los descritos en la Sec. A.2, aplicados a MHD) como puntos tenga el dominio discreto.

## A.4. Método numérico

La resolución numérica de las ecuaciones MHD se llevará a cabo mediante un esquema basado en el método de volúmenes finitos. Este método está muy relacionado al método tradicional de diferencias finitas. Sin embargo, los métodos de volúmenes finitos se obtienen a partir de la forma integral de las leyes de conservación, lo cual presenta muchas ventajas para problemas hiperbólicos [73, 74].

### A.4.1. Formulación general para leyes de conservación

En una dimensión espacial, un método de volúmenes finitos se basa en subdividir el dominio espacial en intervalos (los volúmenes finitos, también llamados *celdas*) y tomar un valor representativo de la integral de la variable conservativa  $q$  en ese intervalo. En cada paso de tiempo actualizamos el valor de esta integral utilizando alguna aproximación del flujo de  $q$  a través de los límites del intervalo. Definimos la celda número  $i$ , como  $\mathcal{C}_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$  (ver Fig.A.3). El valor  $Q_i^n$  aproxima el promedio de  $q$  en la



**Figura A.3:** Método de volúmenes finitos.  $Q_i^n$  aproxima el promedio de  $q$  en la celda  $i$ . Este valor es actualizado a partir de los flujos  $F_{i-1/2}^n$  y  $F_{i+1/2}^n$ .

celda  $i$  al tiempo  $t_n$ ,

$$Q_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x, t_n) dx \equiv \frac{1}{\Delta x} \int_{\mathcal{C}_i} q(x, t_n) dx, \quad (\text{A.41})$$

donde  $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$  es la longitud de la celda. Por simplicidad, siempre utilizaremos grillas uniformes, pero también pueden definirse grillas no uniformes.

Utilizando la forma integral de una ley de conservación, tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}_i} q(x, t) dx = f(q(x_{i-1/2}, t)) - f(q(x_{i+1/2}, t)). \quad (\text{A.42})$$

Con esta expresión podemos desarrollar un algoritmo explícito para avanzar temporalmente la solución. Integrando (A.42) en el tiempo, desde  $t_n$  hasta  $t_{n+1}$  obtenemos,

$$\int_{\mathcal{C}_i} q(x, t_{n+1}) dx - \int_{\mathcal{C}_i} q(x, t_n) dx = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i-1/2}, t)) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i+1/2}, t)) dt. \quad (\text{A.43})$$

Reagrupando esta expresión y dividiendo por  $\Delta x$ ,

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{1}{\Delta x} \left[ \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i+1/2}, t)) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i-1/2}, t)) dt \right]. \quad (\text{A.44})$$

Esta expresión nos dice cómo debe ser actualizado el promedio (A.41) en forma exacta, al cabo de un paso de tiempo. En general, no podemos evaluar las integrales entre cor-

chetes de (A.44) en forma exacta, ya que  $q(x_{i\pm 1/2}, t)$  varía en el tiempo, y no contamos con esa información. Sin embargo podemos introducir el esquema explícito de primer orden,

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n), \quad (\text{A.45})$$

donde  $F_{i-1/2}^n$  es una aproximación del flujo promedio a través de  $x = x_{i-1/2}$ ,

$$F_{i-1/2}^n \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i-1/2}, t)) dt. \quad (\text{A.46})$$

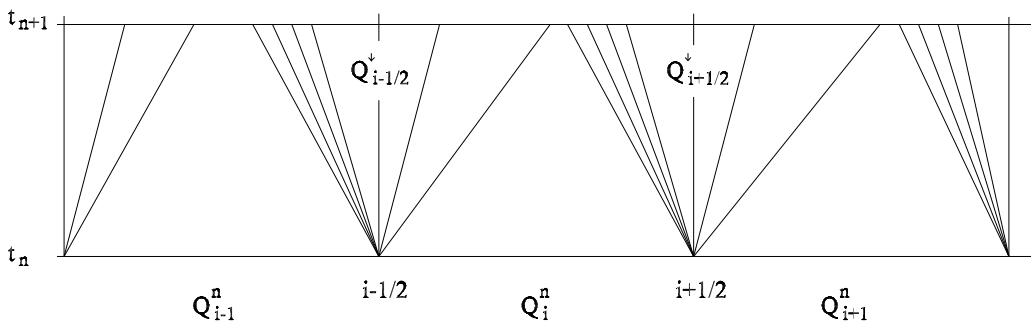
Distintos métodos pueden obtenerse para distintas aproximaciones de  $F_{i-1/2}^n$ . En particular, cualquiera de las elecciones más sencillas usando promedios de los estados en las celdas  $i-1$  e  $i$ , como  $F_{i-1/2}^n = [f(Q_{i-1}^n) + f(Q_i^n)]/2$  o bien  $F_{i-1/2}^n = f[(Q_{i-1}^n + Q_i^n)/2]$ , conducen a métodos incondicionalmente inestables, que no sirven para resolver (A.2) [74].

#### A.4.2. Método de Godunov

La idea propuesta por Godunov [75] es la base de muchos métodos desarrollados para resolver sistemas hiperbólicos, y consiste en aproximar el flujo en la frontera de cada celda según

$$F_{i-1/2}^n = f(q^\downarrow(Q_{i-1}^n, Q_i^n)), \quad (\text{A.47})$$

donde  $q^\downarrow(Q_{i-1}^n, Q_i^n)$  es la solución exacta del problema de Riemann con estados a izquierda y derecha  $Q_{i-1}^n$  y  $Q_i^n$  respectivamente, a lo largo de  $x/t = 0$ .



**Figura A.4:** Método de Godunov. El flujo a través de la superficie  $i-1/2$  que separa las celdas  $i-1$  e  $i$ , se calcula evaluando la función de flujo  $f$  en  $Q_{i-1/2}^\downarrow$ , que es la solución del problema de Riemann, a lo largo de  $x/t = 0$ , con estados iniciales a izquierda y derecha  $Q_{i-1}^n$  y  $Q_i^n$ .

La Fig.A.4 esquematiza el método de Godunov para calcular el flujo de  $q$  en los límites de cada intervalo. Este método tiene una restricción en el máximo paso de tiempo que puede tomarse, que está dada por la condición CFL,

$$\frac{s_{max} \Delta t}{\Delta x} \leq 1, \quad (\text{A.48})$$

donde  $s_{max}$  es la máxima velocidad de todas las ondas que resultan de los problemas de Riemann en los límites de las celdas. El término de la izquierda se denomina *número de Courant*. La condición CFL se debe a Courant, Friedrichs y Lewy [76], y es una condición necesaria para que el método (A.45) sea estable. Esta condición asegura que el dominio de dependencia numérico contenga al dominio de dependencia de la ecuación diferencial.

### A.4.3. Linealización del problema de Riemann

Para aplicar el método de Godunov es necesario resolver el problema de Riemann en la frontera de cada una de las celdas en las que se discretizó el dominio. Éste es en general un problema difícil de resolver en casos no lineales, que requiere procesos iterativos que resultan muy costosos, en tiempo de cálculo, como para resolver en todas las posiciones de la grilla y en todos los pasos de tiempo. Por otro lado, la precisión obtenida al resolver el problema exacto se pierde en el error de discretización. Para efectuar un cálculo más balanceado se han desarrollado métodos para resolver el problema de Riemann en forma aproximada.

Uno de los métodos más eficientes es el propuesto por Roe [77]. La idea es aproximar la solución del problema de Riemann mediante la solución exacta de una linealización del problema original,

$$q_t + \tilde{A}q_x = 0, \quad (\text{A.49})$$

donde la matriz  $\tilde{A}$  depende de los estados en las celdas a izquierda  $Q_l$  y a derecha  $Q_r$ . La matriz  $\tilde{A}(Q_l, Q_r)$  debe satisfacer las siguientes propiedades [77],

1.  $\tilde{A}$  representa un mapeo entre el espacio vectorial del vector de cantidades conservadas  $q$  y el espacio de vectores de flujo  $f$ .
2. Cuando  $Q_l \rightarrow Q_r \rightarrow Q$ ,  $\tilde{A}$  tiende a la matriz jacobiana:  $\tilde{A}(Q_l, Q_r) \rightarrow f'(Q)$ . Esto asegura que el método sea consistente con la ley de conservación original.
3. Los autovectores de  $\tilde{A}$  son linealmente independientes.

Estas propiedades pueden ser satisfechas usando,

$$\tilde{A}(Q_l, Q_r) = f'(\bar{Q}), \quad (\text{A.50})$$

donde  $\bar{Q}$  es algún promedio entre  $Q_l$  y  $Q_r$ . Para los cálculos presentados en esta Tesis se utilizó el promedio aritmético. Existen otras opciones que son más adecuadas para el estudio de ondas de choque en el caso HD [77] y otras discontinuidades en MHD [78].

### A.4.4. Aproximación numérica de la función de flujos

Debemos construir una aproximación para (A.47) a partir de los estados a izquierda ( $Q_{i-1}$ ) y derecha ( $Q_i$ ) usando la solución de (A.49). Tomamos  $\tilde{A} = f'(\bar{Q})$ , donde  $\bar{Q} = (Q_{i-1} + Q_i)/2$ . Usando el análisis presentado en la Sec. A.2.1 [en particular la ec.

(A.28)] obtenemos la solución del problema de Riemann para (A.49) en  $x/t = 0$ ,

$$Q_{i-1/2}^\downarrow = Q_{i-1} + \sum_{k:s_k < 0} \alpha_k r_k, \quad (\text{A.51})$$

que es equivalente a,

$$Q_{i-1/2}^\downarrow = Q_i - \sum_{k:s_k > 0} \alpha_k r_k, \quad (\text{A.52})$$

donde los  $\alpha_k$  vienen dados por (A.29). La sumatoria en (A.51) se extiende sobre las ondas que se propagan hacia a la izquierda ( $s_k < 0$ ), mientras que la sumatoria en (A.52) se extiende sobre las ondas que se propagan hacia a la derecha ( $s_k > 0$ ). Combinando (A.51) y (A.52) podemos expresar el estado intermedio como,

$$Q_{i-1/2}^\downarrow = \frac{1}{2}(Q_{i-1} + Q_i) - \frac{1}{2} \sum_k \hat{\alpha}_k r_k, \quad (\text{A.53})$$

donde  $\hat{\alpha}_k = \text{sgn}(s_k)\alpha_k$ . Comparando (A.4) con (A.49), vemos que la linealización nos lleva a que, localmente,  $f(q) \approx \tilde{A}q$ , de modo que

$$F_{i-1/2} \approx \tilde{A}Q_{i-1/2}^\downarrow = \frac{1}{2}(\tilde{A}Q_{i-1} + \tilde{A}Q_i) - \frac{1}{2}\tilde{A}\left(\sum_k \hat{\alpha}_k r_k\right). \quad (\text{A.54})$$

Si  $\hat{\alpha}$  es el vector columna cuyas componentes son  $\hat{\alpha}_k$ , y recordando que  $\Lambda = R^{-1}AR$  es la matriz diagonal, donde  $\Lambda_{kk} = s_k$ , el último término de (A.54) puede expresarse como,

$$\frac{1}{2}\tilde{A}\left(\sum_k \hat{\alpha}_k r_k\right) = \frac{1}{2}RR^{-1}\tilde{A}(R\hat{\alpha}) = \frac{1}{2}R\Lambda\hat{\alpha} = \frac{1}{2}\sum_k |s_k|\alpha_k r_k. \quad (\text{A.55})$$

Entonces la aproximación numérica de la función de flujos puede escribirse como

$$F_{i-1/2} = \frac{1}{2}[f(Q_{i-1}) + f(Q_i)] - \frac{1}{2}\sum_k |s_k|\alpha_k r_k, \quad (\text{A.56})$$

que puede considerarse como el promedio aritmético de los flujos a izquierda y derecha más una corrección que tiene en cuenta la propagación de la información característica del sistema hiperbólico que se está resolviendo. Los métodos numéricos que logran mejores resultados porque tienen en cuenta la dirección de propagación de la información característica en su discretización, reciben el nombre de métodos de *upwind*. Además, gracias a la capacidad de reproducir soluciones discontinuas que el último término en (A.56) confiere al esquema, este método numérico entra dentro de los esquemas de *shock capturing*.

#### A.4.5. Condiciones de borde

Empleando el algoritmo (A.45) y la función de flujos numérica (A.56) es posible obtener la solución a tiempo  $t_{n+1}$  en la celda  $i$ , a partir de los valores  $Q_{i-1}^n$ ,  $Q_i^n$  y  $Q_{i+1}^n$ . Si consideramos una grilla de  $N$  celdas vemos que el algoritmo no se puede aplicar para actualizar los valores  $Q_1^n$  y  $Q_N^n$ . En lugar de definir un algoritmo especial para



las celdas que limitan con la frontera del dominio, es común utilizar celdas “ficticias” (*ghost cells*). La idea es extender la grilla numérica de forma de poder aplicar el mismo algoritmo a todos los puntos interiores. Los valores de  $Q$  que se imponen en las celdas ficticias son función de la solución en las celdas interiores y se eligen adecuadamente de forma que se satisfaga la condición de borde deseada en el contorno del dominio. Por ejemplo, si el dominio es el intervalo  $[x_1, x_2]$ , con  $x_1 < x_2$ , y la solución debe satisfacer la condición de Dirichlet  $q(x_1, t) = C$ , entonces los valores en las celdas ficticias a la izquierda de  $x_1$  deben satisfacer,

$$q(x_1 - x, t_n) = 2C - q(x_1 + x, t_n). \quad (\text{A.57})$$

Para una grilla uniformemente espaciada, la versión discreta de esta condición es,

$$Q_{-i}^n = 2C - Q_i^n, \quad i = 1, \dots, N_{gc}, \quad (\text{A.58})$$

donde  $N_{gc}$  es el número de celdas ficticias, que se toma, en general, igual a  $l$ , si  $l$  es el orden del método. Si la condición de borde es derivada normal igual a cero, los valores a imponer son,

$$q(x_1 - x, t_n) = q(x_1 + x, t_n), \quad (\text{A.59})$$

es decir, se copian los valores de las celdas interiores en la celda exterior correspondiente.

#### A.4.6. Métodos de mayor orden

El método numérico descrito en las Secciones precedentes es de primer orden, ya que la discretización  $Q_i^n$  de la incógnita  $q(x, t)$  es constante a trozos ( $Q_i^n$  es constante en cada celda). Esto introduce una difusividad numérica demasiado alta, que puede disminuirse en gran medida usando una representación espacial de  $q(x, t)$  lineal a trozos. De esta forma, la solución en cada celda estará caracterizada por el valor en el centro  $Q_i^n$  y una pendiente  $\sigma_i^n$ , de forma que en la celda  $i$  la solución será,

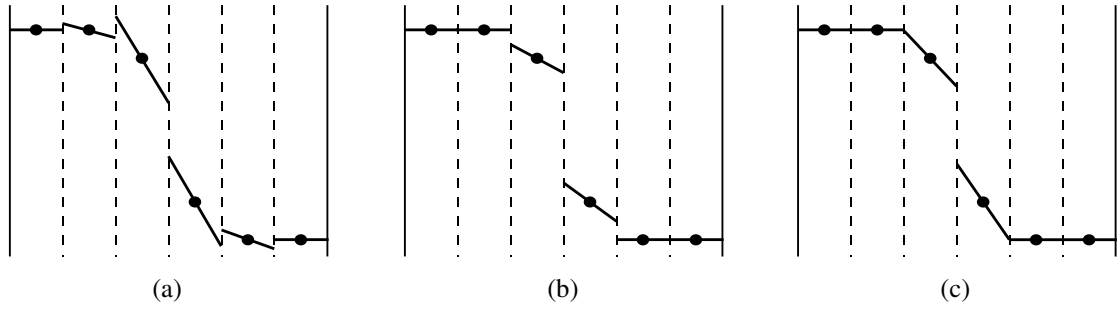
$$q(x, t_n) = Q_i^n + \sigma_i^n(x - x_i) \quad \text{para} \quad x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}. \quad (\text{A.60})$$

La elección de la pendiente  $\sigma_i^n$  puede hacerse de muchas formas pero es esencial que esta elección no aumente la “variación total” (*total variation*) de la solución [74]. En lugar de entrar en los detalles de la definición matemática de la variación total de una función (ver por ejemplo [79]), ilustraremos el problema considerando tres formas de elegir las pendientes. En primer lugar consideramos la opción más intuitiva de pendientes centradas,

$$\sigma_i = \frac{Q_{i+1} - Q_{i-1}}{2\Delta x}. \quad (\text{A.61})$$

En la Fig. A.5 (a) se muestra la reconstrucción espacial obtenida con esta elección. Se observa que en muchas de las interfaces el salto en la variable cambia de signo, respecto del salto en los valores en el centro. Esto produce oscilaciones espúreas, de origen numérico, que no responden a un comportamiento físico del sistema en estudio.

Para evitar este problema se han desarrollado una cantidad de métodos para limitar las pendientes de forma de no incrementar la variación total de la solución. Estos



**Figura A.5:** Representación lineal a trozos de la solución utilizando distintos métodos para elegir las pendientes: (a) pendientes centradas, (b) minmod y (c) MC.

métodos de interpolación suelen denominarse limitadores TVD (por *total variation diminishing*). Por ejemplo puede usarse la función *minmod*, que se define como,

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } |a| < |b| \text{ y } ab > 0, \\ b & \text{si } |b| < |a| \text{ y } ab > 0, \\ 0 & \text{si } ab \leq 0, \end{cases} \quad (\text{A.62})$$

es decir, el mínimo valor absoluto, o cero si hay un cambio de signo. Con esta función se pueden calcular las pendientes de la forma,

$$\sigma_i = \text{minmod}\left(\frac{Q_i - Q_{i-1}}{\Delta x}, \frac{Q_{i+1} - Q_i}{\Delta x}\right). \quad (\text{A.63})$$

Con esta elección se obtienen la representación esquematizada en la Fig. A.5 (b).

Otra elección muy utilizada y que produce una menor difusividad numérica que (A.63) manteniendo la propiedad TVD, es el limitador MC (*monotonized central-difference limiter*),

$$\sigma_i = \text{minmod}\left(\left(\frac{Q_{i+1} - Q_{i-1}}{2\Delta x}\right), 2\left(\frac{Q_i - Q_{i-1}}{\Delta x}\right), 2\left(\frac{Q_{i+1} - Q_i}{\Delta x}\right)\right), \quad (\text{A.64})$$

que produce los resultados esquematizados en Fig. A.5 (c).

Con este tipo de representaciones espaciales, los esquemas TVD logran una convergencia de segundo orden en regiones donde el flujo es suave, evitando oscilaciones espúreas cerca de las zonas de altos gradientes. En problemas hiperbólicos no lineales, las zonas de altos gradientes se desarrollan prácticamente siempre, incluso partiendo de condiciones iniciales suaves. Finalmente mencionamos que existen otros enfoques para lograr aumentar el orden del método manteniendo la condición TVD, basados en modificar la función de flujo numérica (A.56) [80].

#### A.4.7. Problemas multidimensionales

Para atacar problemas en los que las variables dependen de dos o tres dimensiones espaciales es necesario extender los métodos hasta aquí presentados. La forma más simple de hacer esta extensión es dividir el problema multidimensional en una secuencia de problemas unidimensionales (*dimensional splitting*). Esta división resulta

particularmente simple en el caso de una grilla cartesiana alineada con el sistema de coordenadas.

Por ejemplo, el problema bidimensional,

$$q_t + f(q)_x + g(q)_y = 0, \quad (\text{A.65})$$

puede ser separado en

$$\text{barrido en } x : \quad q_t + f(q)_x = 0, \quad (\text{A.66})$$

$$\text{barrido en } y : \quad q_t + g(q)_y = 0. \quad (\text{A.67})$$

En el barrido en  $x$  comenzamos con los promedios en cada celda  $Q_{ij}^n$  a tiempo  $t_n$  y resolvemos el problema unidimensional (A.66) a lo largo de cada fila de celdas  $\mathcal{C}_{ij}$ , con  $j$  fijo, actualizando  $Q_{ij}^n$  a  $Q_{ij}^*$ ,

$$Q_{ij}^* = Q_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2,j}^n - F_{i-1/2,j}^n), \quad (\text{A.68})$$

donde  $F_{i-1/2,j}^n$  es el flujo numérico de la forma (A.56) para el problema unidimensional entre las celdas  $\mathcal{C}_{i-1,j}$  y  $\mathcal{C}_{ij}$ . Para el barrido en  $y$  usamos los valores intermedios  $Q_{ij}^*$  para resolver (A.67) a lo largo de cada columna de celdas  $\mathcal{C}_{ij}$ , con  $i$  fijo, que nos lleva a obtener  $Q_{ij}^{n+1}$ ,

$$Q_{ij}^{n+1} = Q_{ij}^* - \frac{\Delta t}{\Delta y} (G_{i,j+1/2}^n - G_{i,j-1/2}^n). \quad (\text{A.69})$$

Procediendo en forma análoga puede construirse un esquema para resolver problemas tridimensionales.

En general, la separación dimensional del problema produce un error orden  $(\Delta t)^2$ . Sin embargo, este error es casi siempre menor al error introducido por el método numérico en cada barrido, haciendo que el método de separación dimensional sea muy efectivo [74].

#### A.4.8. Términos disipativos

Hasta aquí, hemos descripto un método para obtener soluciones numéricas de las ecuaciones MHD ideal. Sin embargo, si uno resuelve estas ecuaciones por este método en una determinada grilla, encontrará que las soluciones están afectadas por una cierta disipación. Esta disipación es de origen numérico, y se debe a la limitada representación espacial de la grilla. Justamente, la gran virtud del término de *upwind* [el segundo del miembro de la derecha de (A.56)], es que hace que el error de discretización se comporte como una contribución disipativa, en lugar de introducir oscilaciones espúreas. Si se refina la grilla, el efecto de la disipación numérica disminuye. Este tipo de métodos suelen aplicarse para resolver problemas en escalas de tiempo muy cortas como para que la disipación numérica tenga un efecto importante. En ese caso se dice que mediante el método numérico uno obtiene la solución en el límite de baja viscosidad [74].

Nosotros estamos interesados en encontrar soluciones de las ecuaciones MHD resistivas, en escalas de tiempo comparables a la resistiva. Si bien el error numérico del método utilizado se comporta como una disipación, no estamos seguros que la disipa-

ción numérica reproduzca la disipación física del modelo MHD resistivo. Por tal motivo, agregamos los términos disipativos de la MHD resistiva como términos fuente en la ley de conservación,

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{F})^T = f(Q), \quad (\text{A.70})$$

donde  $f$  representa los términos proporcionales a  $\mu$  y a  $\eta$ . Para resolver esto numéricamente utilizamos una estrategia de paso fraccionado (análoga a la de la Sec. A.4.7):

$$Q_i^{n+1} = Q_i^* + \Delta t f(Q_i^n), \quad (\text{A.71})$$

donde  $Q_i^*$  ahora es el valor que se obtiene después de actualizar la solución a tiempo  $t_n$ ,  $Q_i^n$ , con los flujos (A.56), de la parte ideal del modelo.

Las derivadas involucradas en los términos disipativos se aproximan mediante diferencias finitas centradas. Por ejemplo, para la componente  $l$  del campo magnético tenemos,

$$\nabla^2 B_{ijk}^l \approx \frac{B_{i-1,jk}^l - 2B_{ijk}^l + B_{i+1,jk}^l}{\Delta x^2} + \frac{B_{i,j-1,k}^l - 2B_{ijk}^l + B_{i,j+1,k}^l}{\Delta y^2} + \frac{B_{i,j,k-1}^l - 2B_{ijk}^l + B_{i,j,k+1}^l}{\Delta z^2}.$$

Con este tipo de aproximaciones es posible calcular  $f(Q_i^n)$  y resolver (A.71). De esta forma extendemos el método numérico al caso MHD resistivo.

#### A.4.9. Restricción $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

Las ecuaciones MHD son compatibles con la restricción  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . Esto quiere decir que si la condición inicial satisface esta condición (y también lo hacen las condiciones de contorno), no deberían existir inconvenientes si calculamos la evolución del vector (A.1) usando (A.2) y (A.3) en forma exacta. Sin embargo, al utilizar una estrategia numérica ocurre que la solución discreta introduce una componente no solenoidal de campo magnético. Una pequeña componente no solenoidal de campo produce efectos físicos incorrectos (como monopolos magnéticos y aceleraciones en la dirección del campo debidas a la fuerza de Lorentz) y produce una alta inestabilidad en el código. Este inconveniente surge en los problemas de más de una dimensión espacial, ya que en el caso 1D la condición  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  se reduce a  $B_x = \text{constante}$ .

La solución que se plantea a este problema es la de mantener alguna representación numérica de  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  menor que el error de discretización. Cuál de todas las representaciones posibles de  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  es adecuado controlar es una decisión que se debe tomar en cada caso. Existen varios métodos para mantener esta restricción [81].

En esta Tesis se emplea el método de proyección propuesto originalmente por Brackbill y Barnes [82]. Si  $\mathbf{B}^*$  es la solución numérica a tiempo  $t_{n+1}$  provista por el esquema de volúmenes finitos (o algún otro esquema), la idea es obtener el valor definitivo  $\mathbf{B}^{n+1}$  proyectando  $\mathbf{B}^*$  sobre un espacio de funciones solenoidales. Todo campo vectorial puede ser descompuesto en forma única, como la suma de un rotor y un gradiente,

$$\mathbf{B}^* = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \phi, \quad (\text{A.72})$$

donde el rotor del potencial vector tiene la componente físicamente relevante del campo

magnético  $\mathbf{B}^*$ . Tomando la divergencia miembro a miembro, obtenemos una ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \mathbf{B}^*, \quad (\text{A.73})$$

que puede ser resuelta para obtener la función escalar  $\phi$ . Luego, es posible corregir el campo magnético haciendo

$$\mathbf{B}^{n+1} = \mathbf{B}^* - \nabla \phi. \quad (\text{A.74})$$

Nótese que esta corrección no afecta la densidad de corriente, ya que  $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}^{n+1} = \nabla \times \mathbf{B}^*$ .

La versión discreta del operador divergencia que se utiliza en este trabajo se consigue utilizando diferencias finitas centradas,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} \approx \frac{B_{i+1,jk}^x - B_{i-1,jk}^x}{2\Delta x} + \frac{B_{i,j+1,k}^y - B_{i,j-1,k}^y}{2\Delta y} + \frac{B_{ij,k+1}^z - B_{ij,k-1}^z}{2\Delta z}. \quad (\text{A.75})$$

La ecuación (A.73) se resuelve mediante el método iterativo de gradientes biconjugados estabilizado (Bi-CGStab) [83].

#### A.4.10. Implementación

Debido a la gran popularidad que ganaron los métodos numéricos basados en esquemas de *upwind*, capaces de resolver problemas no lineales con soluciones discontinuas, existe una gran cantidad de información en la literatura, y además existen códigos en los que se han implementado los métodos descritos en este apéndice. Estos códigos pueden usarse para resolver una gran cantidad de situaciones físicas, y además, constituyen una excelente base para desarrollar un código capaz de resolver la aplicación particular de interés (suponiendo que ésta no esté incluida entre los problemas que el código puede resolver sin modificaciones). A continuación se listan algunos de los códigos existentes más conocidos:

- CLAWPACK (Conservation Law Package). Autor: Randall J. Leveque. Conjunto de rutinas, principalmente en FORTRAN 77, destinadas a resolver sistemas hiperbólicos en general. Disponible en: <http://www.amath.washington.edu/~claw/>
- VAC (Versatile Advection Code). Autor: Gábor Tóth. Conjunto de rutinas en FORTRAN 90, diseñadas para resolver problemas de flujo compresible HD y MHD. Posee una gran variedad de métodos implementados, incluyendo los descritos en este apéndice. Disponible en: <http://grid.engin.umich.edu/~gtoth/VAC/>
- ATHENA. Autor: Jim Stone. Conjunto de rutinas en C (con alguna versión en FORTRAN), destinadas a problemas HD y MHD compresibles en grillas cartesianas. Disponible en: <http://www.astro.princeton.edu/~jstone/athena.html>

En esta Tesis se utilizó como base el código VAC. Este código permite, en principio, resolver las ecuaciones MHD en dominios cilíndricos (como es el caso de los spheromaks y ST-PCC-CG), usando grillas deformadas, sin introducir modificaciones al código original. Sin embargo, después de muchas pruebas, se concluyó que se obtienen mejores resultados usando una grilla cartesiana, sobre la cual se interpolan las condiciones de

contorno (*embedded boundaries* [74]) correspondientes a un cilindro conductor, siguiendo el método de interpolación de segundo orden descrito por Forrer y Jeltsch [84].

# Bibliografía

- [1] Miley, G. H., Towner, H., Ivich, N. Fusion cross sections and reactivities. Inf. téc., Illinois Univ., Urbana (USA), 1974. URL <http://www.osti.gov/scitech/biblio/4014032>.
- [2] Priest, E., Forbes, T. (eds.) Magnetic reconnection : MHD theory and applications. 2000.
- [3] Garcia-Martinez, P. L. Procesos de relajación y auto-organización en plasmas de fusión. Tesis Doctoral, Instituto Balseiro, UNCuyo, 2010.
- [4] Peng, Y.-K. M. The physics of spherical torus plasmas. *Physics of Plasmas*, **7** (5), 1681–1692, 2000. URL <https://doi.org/10.1063/1.874048>.
- [5] Ono, M., Kaita, R. Recent progress on spherical torus research. *Physics of Plasmas*, **22** (4), 040501, 2015. URL <https://doi.org/10.1063/1.4915073>.
- [6] Taylor, J. B. Relaxation of toroidal plasma and generation of reverse magnetic fields. *Phys. Rev. Lett.*, **33**, 1139–1141, Nov 1974. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.33.1139>.
- [7] Rosenbluth, M. N., Bussac, M. N. MHD stability of Spheromak. *Nuclear Fusion*, **19**, 489–498, abr. 1979.
- [8] Nogi, Y., Ogura, H., Osanai, Y., Saito, K., Shiina, S., Yoshimura, H. Spheromak formation by theta pinch. *Journal of the Physical Society of Japan*, **49** (2), 710–716, 1980. URL <https://doi.org/10.1143/JPSJ.49.710>.
- [9] Jarboe, T. R., Henins, I., Hoida, H. W., Linford, R. K., Marshall, J., Platts, D. A., *et al.* Motion of a compact toroid inside a cylindrical flux conserver. *Phys. Rev. Lett.*, **45**, 1264–1267, Oct 1980. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.45.1264>.
- [10] Rusbridge, M. G., Gee, S. J., Browning, P. K., Cunningham, G., Duck, R. C., al-Karkhy, A., *et al.* The design and operation of the SPHEX spheromak. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, **39**, 683–714, mayo 1997.
- [11] Alladio, F., Costa, P., Mancuso, A., Micozzi, P., Papastergiou, S., Rogier, F. Design of the PROTO-SPHERA experiment and of its first step (MULTI-PINCH). *Nuclear Fusion*, **46**, 613–+, ago. 2006.

- [12] Tang, X. Z., Boozer, A. H. Spherical tokamak with a plasma center column. *Physics of Plasmas*, **13**, 42514–42523, Apr 2006.
- [13] Hsu, S. C., Tang, X. Z. Proposed Experiment to Study Relaxation Formation of a Spherical Tokamak with a Plasma Center Column. *Journal of Fusion Energy*, **2**, 85–90, Jun 2007.
- [14] Cowling, T. G. The stability of gaseous stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **94**, 768–782, jun. 1934.
- [15] Sovinec, C. R., Finn, J. M., Del-Castillo-Negrete, D. Formation and sustainment of electrostatically driven spheromaks in the resistive magnetohydrodynamic model. *Physics of Plasmas*, **8**, 475–490, feb. 2001.
- [16] García Martínez, P. L., Farengo, R. Relaxation of spheromak configurations with open flux. *Physics of Plasmas*, **16**, 112508, 2009.
- [17] García Martínez, P. L., Farengo, R. Spheromak formation and sustainment by tangential boundary flows. *Physics of Plasmas*, **17**, 050701, 2010.
- [18] García Martínez, P. L., Lampugnani, L. G., Farengo, R. Effect of the helicity injection rate and the Lundquist number on spheromak sustainment. *Physics of Plasmas*, **21**, 122511, 2014.
- [19] Alladio, F., Mancuso, A., Micozzi, P., Rogier, F. Behavior of perturbed plasma displacement near regular and singular x-points for compressible ideal magnetohydrodynamic stability analysis. *Physics of Plasmas*, **13** (8), 082505, 2006. URL <https://doi.org/10.1063/1.2220008>.
- [20] Bellan, P. M. Spheromaks. London: Imperial College Press, 2000.
- [21] Sarff, J., Lanier, N., S., P., M., S. Increased confinement and  $\beta$  by inductive poloidal current drive in the reversed field pinch. *Physical Review Letters*, **71**, ago. 1997.
- [22] Wesson, j. Tokamaks. Oxford: Clarendon Press, 2004.
- [23] Freidberg, J. P. Ideal MHD. New York: Cambridge University Press, 2014.
- [24] White, R. P. The theory of Toroidally confined Plasmas. London: Imperial College Press, 2014.
- [25] Goldston, R. J. Energy confinement scaling in Tokamaks: some implications of recent experiments with Ohmic and strong auxiliary heating. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, **26** (1A), 87–103, 1984.
- [26] Braginskii, S. I. In Reviews of Plasma Physics, tomo 1. New York: M.A. Leontovich (Consultants Bureau), 1965.
- [27] Berger, M. A., Field, G. B. The topological properties of magnetic helicity. *Journal of Fluid Mechanics*, **147**, 133–148, 1984.



- [28] Finn, J. M., Antonsen, T. M. Magnetic helicity: what it is, and what it is good for? *Comments Plasma Physics and Controlled Fusion*, **33**, 1139–+, 1985.
- [29] Asenjo, F. A., Comisso, L. Relativistic magnetic reconnection in kerr spacetime. *Phys. Rev. Lett.*, **118**, 055101, Feb 2017. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.118.055101>.
- [30] Biskamp, D. Magnetic Reconnection in Plasmas. New York: Cambridge University Press, 2000.
- [31] Berger, M. A. Magnetic Helicity in Space Physics. En: M. R. Brown, R. C. Canfield, & A. A. Pevtsov (ed.) Measurement Techniques in Space Plasmas Fields, págs. 1–+. 1999.
- [32] Woltjer, L. A Theorem on Force-Free Magnetic Fields. *Proceedings of the National Academy of Science*, **44**, 489–491, jun. 1958.
- [33] Brennan, D. P., Browning, P. K., van der Linden, R. A. M. A two-dimensional magnetohydrodynamic stability model for helicity-injected devices with open flux. *Physics of Plasmas*, **9**, 3526–3535, ago. 2002.
- [34] García Martínez, P. L., Farengo, R. Non-linear dynamics of kink-unstable spheromak equilibria. *Physics of Plasmas*, **16**, 082507, 2009.
- [35] Yamada, M. Mechanisms of impulsive magnetic reconnection: Global and local aspects. *Physics of Plasmas*, **18** (11), 111212, 2011. URL <https://doi.org/10.1063/1.3658034>.
- [36] Ortolani, S., Schnack, D. D. Magnetohydrodynamics of plasma relaxation. Singapore: World Scientific, 1993.
- [37] Jarboe, T. R. Review of spheromak research. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, **36**, 945–990, jun. 1994.
- [38] Browning, P. K., Stanier, A., Ashworth, G., McClements, K. G., Lukin, V. S. Self-organization during spherical torus formation by flux rope merging in the mega ampere spherical tokamak. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, **56** (6), 064009, apr 2014. URL <https://doi.org/10.1088%2F0741-3335%2F56%2F6%2F064009>.
- [39] Jarboe, T. R. The spheromak confinement device. *Physics of Plasmas*, **12** (5), 058103–+, mayo 2005.
- [40] Brennan, D., Browning, P. K., van der Linden, R. A. M., Hood, A. W., Woodruff, S. Stability studies and the origin of the n=1 mode in the SPHEX spheromak experiment. *Physics of Plasmas*, **6**, 4248–4259, nov. 1999.
- [41] Al-Karkhy, A., Browning, P. K., Cunningham, G., Gee, S. J., Rusbridge, M. G. Observations of the magnetohydrodynamic dynamo effect in a spheromak plasma. *Physical Review Letters*, **70**, 1814–1817, mar. 1993.

- [42] Frisch, U., Pouquet, A., Leorat, J., Mazure, A. Possibility of an inverse cascade of magnetic helicity in magnetohydrodynamic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, **68**, 769–778, abr. 1975.
- [43] Ting, A. C., Montgomery, D., Matthaeus, W. H. Turbulent relaxation processes in magnetohydrodynamics. *Physics of Fluids*, **29**, 3261–3274, oct. 1986.
- [44] Mininni, P. D. Scale interactions in magnetohydrodynamic turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **43** (1), 377–397, 2011. URL <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-122109-160748>.
- [45] Finn, J. M., Manheimer, W. M. Spherical tilting instability in cylindrical geometry. *Physics of Fluids*, **24**, 1336–1341, Apr 1981.
- [46] Bondeson, A., Marklin, G., An, Z. G., Chen, H. H., Lee, Y. C., Liu, C. S. Tilting instability of a cylindrical spheromak. *Physics of Fluids*, **24**, 1682–1688, Sep 1981.
- [47] Hooper, E. B., Pearlstein, L. D., Bulmer, R. H. MHD equilibria in a spheromak sustained by coaxial helicity injection. *Nuclear Fusion*, **39**, 863–871, jul. 1999.
- [48] Garcia-Martinez, P. L. Dynamics of magnetic relaxation in spheromaks. En: L. Zheng (ed.) Topics in Magnetohydrodynamics, cap. 4, págs. 85–116. InTech, 2012.
- [49] García Martínez, P. L., Farengo, R. Selective decay in a helicity-injected spheromak. *Journal of Physics Conference Series*, **166** (1), 012010, mayo 2009.
- [50] Jarboe, T. R., Wysocki, F. J., Fernández, J. C., Henins, I., Marklin, G. J. Progress with energy confinement time in the CTX spheromak. *Physics of Plasmas*, **2**, mar. 1990.
- [51] Hudson, B., Wood, R. D., McLean, H. S., Hooper, E. B., Hill, D. N., Jayakumar, J., *et al.* Energy confinement and magnetic field generation in the sspX spheromak. *Physics of Plasmas*, **15** (5), 056112, 2008. URL <http://dx.doi.org/10.1063/1.2890121>.
- [52] Tang, X. Z., Boozer, A. H. Force-Free Magnetic Relaxation in Driven Plasmas. *Physical Review Letters*, **94**, 225004, Jun 2005.
- [53] Knox, S. O., Barnes, C. W., Marklin, G. J., Jarboe, T. R., Henins, I., Hoida, H. W., *et al.* Observations of spheromak equilibria which differ from the minimum-energy state and have internal kink distortions. *Physical Review Letters*, **56**, 842–845, feb. 1986.
- [54] Shumlak, U., Jarboe, T. R. Stable high beta spheromak equilibria using concave flux conservers. *Physics of Plasmas*, **7**, 2959–2963, jul. 2000.
- [55] Bussac, M. N., Pellat, R., Edery, D., Soule, J. L. Internal kink modes in toroidal plasmas with circular cross sections. *Phys. Rev. Lett.*, **35**, 1638–1641, Dec 1975. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.35.1638>.

- [56] Wahlberg, C. Aspect ratio dependence of the ideal internal kink mode stability in a toroidal plasma with circular cross section. *Physics of Plasmas*, **11** (5), 2119–2134, 2004. URL <https://doi.org/10.1063/1.1710901>.
- [57] Ryutov, D. D., Cohen, R. H., Pearlstein, L. D. Stability of a finite-length screw pinch revisited. *Physics of Plasmas*, **11** (10), 4740–4752, 2004. URL <http://dx.doi.org/10.1063/1.1781624>.
- [58] Hooper, E. B., Romero-Talamás, C. A., LoDestro, L. L., Wood, R. D., McLean, H. S. Aspect-ratio effects in driven, flux-core spheromak. *Physics of Plasmas*, **16**, 052506, mayo 2009.
- [59] Chandrasekhar, S., Kendall, P. C. On Force-Free Magnetic Fields. *Astrophysical Journal*, **126**, 457, Jan 1957.
- [60] Izzo, V. A., Jarboe, T. R. A numerical assessment of the Lundquist number requirement for relaxation current drive. *Physics of Plasmas*, **10**, 2903–2911, jul. 2003.
- [61] Katayama, K., Katsurai, M. Three-dimensional numerical simulations of the relaxation process in spheromak plasmas. *Physics of Fluids*, **29**, 1939–1947, jun. 1986.
- [62] Taylor, J. B. Relaxation and magnetic reconnection in plasmas. *Reviews of Modern Physics*, **58**, 741–763, jul. 1986.
- [63] Lampugnani, L. G., Garcia-Martinez, P. L., Farengo, R. Relevant parameter space and stability of spherical tokamaks with a plasma center column. *Physics of Plasmas*, **24** (2), 022501, 2017. URL <http://dx.doi.org/10.1063/1.4975018>.
- [64] Hastie, R. J. Sawtooth instability in tokamak plasmas. *Astrophysics and Space Science*, **256** (1), 177–204, Mar 1997. URL <https://doi.org/10.1023/A:1001728227899>.
- [65] O'Bryan, J. B., Romero-Talamás, C. A., Woodruff, S. Simulation of multi-pulse coaxial helicity injection in the sustained spheromak physics experiment. *Physics of Plasmas*, **25** (3), 032503, 2018. URL <https://doi.org/10.1063/1.5018319>.
- [66] Jarboe, T. R., Henins, I., Sherwood, A. R., Barnes, C. W., Hoida, H. W. Slow Formation and Sustainment of Spheromaks by a Coaxial Magnetized Plasma Source. *Physical Review Letters*, **51**, 39–42, jul. 1983.
- [67] Nelson, B. A., Jarboe, T. R., Orvis, D. J., McCullough, L. A., Xie, J., Zhang, C., *et al.* Formation and sustainment of a 150 kA tokamak by coaxial helicity injection. *Physical Review Letters*, **72** (23), 3666–3669, jun. 1994.
- [68] Yamada, M., Yoo, J., Myers, C. E. Understanding the dynamics and energetics of magnetic reconnection in a laboratory plasma: Review of recent progress on selected fronts. *Physics of Plasmas*, **23** (5), 055402, 2016. URL <https://doi.org/10.1063/1.4948721>.

- [69] Bateman, G. MHD instabilities. Cambridge: Cambridge, Mass., MIT Press, 1978.
- [70] Powell, K. G., Roe, P. L., Linde, T. J., Gombosi, T. I., de Zeeuw, D. L. A Solution-Adaptive Upwind Scheme for Ideal Magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, **154**, 284–309, sep. 1999.
- [71] Roe, P. L., Balsara, D. S. Notes on the Eigensystem of Magnetohydrodynamics. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **56**, 57–67, 1996.
- [72] Brio, M., Wu, C. C. An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, **75**, 400–422, abr. 1988.
- [73] Leveque, R. J. Numerical methods for conservation laws. Birkhäuser Verlag, 1992.
- [74] Leveque, R. J. Finite volume methods for hyperbolic problems. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [75] Godunov, S. K. A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. *Math. Sbornik*, **47**, 271–306, 1959.
- [76] Courant, R., Friedrichs, K., Lewy, H. Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*, **100** (1), 32–74, 1928.
- [77] Roe, P. L. Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes. *Journal of Computational Physics*, **43**, 357–+, oct. 1981.
- [78] Balsara, D. S. Linearized Formulation of the Riemann Problem for Adiabatic and Isothermal Magnetohydrodynamics. *Astrophysical Journal Supplement*, **116**, 119–+, mayo 1998.
- [79] Harten, A. On a class of high resolution total variation stable finite difference schemes. *SIAM J. Numer. Anal.*, **21**, 1–23, 1984.
- [80] Sweby, P. K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM J. Numer. Anal.*, **21**, 995–1011, 1984.
- [81] Toth, G. The  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  Constraint in Shock-Capturing Magnetohydrodynamics Codes. *Journal of Computational Physics*, **161**, 605–652, jul. 2000.
- [82] Brackbill, J. U., Barnes, D. C. The effect of nonzero product of magnetic gradient and  $\mathbf{B}$  on the numerical solution of the magnetohydrodynamic equations. *Journal of Computational Physics*, **35**, 426–430, mayo 1980.
- [83] van der Vorst, H. Bi-CGSTAB: A Fast and Smoothly Converging Variant of Bi-CG for the Solution of Nonsymmetric Linear Systems. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, **13**, 631–644, 1992.
- [84] Forrer, H., Jeltsch, R. A higher-order boundary treatment for cartesian-grid methods. *Journal of Computational Physics*, **140**, 259–277, 1998.

# Publicaciones asociadas

- *Effect of the helicity injection rate and the Lundquist number on spheromak sustainment*, P. L. Garcia-Martinez, L. G. Lampugnani and R. Farengo, Physics of Plasmas, **21**, pag. 122511. (2014).
- *Relevant parameter space and stability of spherical tokamaks with a plasma center column*, L. G Lampugnani, P. L. Gacia-Martinez y R. Farengo, Physics of Plasmas, **24**, pag. 022501 (2017).
- *Spherical tokamaks with a high current-carrying plasma center column*, L. G Lampugnani, P. L. Gacia-Martinez y R. Farengo, Physics of Plasmas, **25**, pag. 122513 (2018).



# Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer las personas del grupo de trabajo. A mi director Ricardo, quien me abrió las puertas para que pueda ser parte de su grupo de trabajo, me orientó y formó con una intachable responsabilidad y profesionalismo, siempre dispuesto a resolver dudas estableciendo un dialogo respetuoso. A Pablo, a quien merece ser mencionado co-director de esta tesis, con gran amabilidad, capacidad y conocimiento aportó las bases para comenzar con mis tareas de investigación, aportó ideas y conocimientos arrojándome “salvavidas” cuando más lo necesitaba. A Hugo, porque además aceptar ser el revisor de esta tesis y prestar yerba mate, me dio soporte celebrando las buenas y arengó en etapas difíciles que me ayudaron a seguir con más entusiasmo y optimismo.

A mi familia, mi madre Cintia y padre Jorge que han sido los creadores de sueños, que con mucho amor y confianza formaron las bases con valores para que pueda crecer y formarme profesionalmente. A mis hermanos Paula y Sebastián, quienes son mis compañeros infalibles de vida que siempre estuvieron conmigo en momentos alegres y tristes en estos años. Se nos fue, pero luchamos juntos y a pesar de todo seguimos adelante. A mi tía Sandra, un ejemplo de persona, una gran luchadora, que me acompañó y me ayudó en momentos difíciles para que pueda progresar con tranquilidad.

Quiero agradecer a Gloria, con quien compartimos los últimos años de mi carrera. Me ayudó a sostenerme, organizarme, y compartimos momentos y aventuras que ayudaron a dar aire a la rutina. Me ayudó mucho a seguir para adelante y bancó, entre otras cosas, todas las consecuencias atribuidas a la finalización de una tesis. A ella le estoy profundamente agradecido por los momentos de alegría que compartimos, su cariño, el aprendizaje y crecimiento personal a lo largo de los años.

A mis amigos, Marce, que acompañado de largas pedaleadas, caminatas y fogones hemos charlado y filosofado a lo tonto. Marquito, con quien compartimos largas charlas entre cenas y salidas hoy coleccionamos una gran cantidad de anécdotas. Dani, amigos desde el primer año de estudios en Bahía Blanca, mantuvimos una amistad a distancia los primeros años, sin embargo llegó a Bariloche con postdoc en mano en mis últimos años de tesis y entre algunos eventuales rescates personales también compartimos lindos momentos y charlas. A Juan, Uara y Seba con quienes compartí muy agradables momentos entre salidas de montaña, fogones y cenas. A Agustín (el gordo) que su aguante desde el viejo continente arengó para darle para adelante y me llevo a conocer cuando pude visitarlo. A Nicolás y su familia quienes generosamente, con mucha calidez y atención me dieron alojamiento en Roma, unos excelentes anfitriones.

A mis compañeros de cátedra de Mecánica Estadística del Instituto, Daniel, Alejandro y Nicolás. Unos excelentes profesionales y docentes que con su gran compañerismo pude aprender de ellos, haciendo además un agradable ambiente de trabajo.

Mas allá de mi esfuerzo personal y la ayuda directa e indirecta de las personas que mencioné arriba para terminar esta tesis, no debe faltar el agradecimiento a las instituciones que brindaron el recurso para llevar a cabo las tareas de investigación. Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), a todo el personal administrativo del Instituto Balseiro (IB), Universidad Nacional de Cuyo (UNCuyo), Centro Atómico Bariloche (CAB) y a la Comisión Nacional de Energía Atómica (CNEA). También debo agradecer al International Centre of Theoretical Physics (ICTP) por haber contribuido con recursos para participar en dos Workshops de física de plasmas. A Julio Herrera de la UNAM y al personal que organizó el LAWPP 2017 que contribuyeron para que pueda participar del 16° Workshop Latinoamericano de Física de Plasmas.